

平成25年度 教科に関する研究
研究主題「思考力・判断力・表現力を育む学習指導と評価」

算数・数学

数学的な思考力・表現力を育む算数・数学科学習指導と評価

—ねらいを明確にした算数的活動・数学的活動を通して—



目 次

| | | |
|---|---|----|
| 1 | 主題について | 1 |
| 2 | 授業研究 | |
| | 【授業研究 1】 | |
| | 小学校第 6 学年「円の面積」における 数学的な思考力・表現力を育む算数科学習指導と評価 －円の求積公式を既習の図形に帰着して考え、説明する活動を通して－ | 5 |
| | 【授業研究 2】 | |
| | 小学校第 6 学年「円の面積」における 数学的な思考力・表現力を育む算数科学習指導と評価 －複合図形の求積方法を図と式を関連付けて考え、説明する活動を通して－ | 11 |
| | 【授業研究 3】 | |
| | 小学校第 6 学年「速さ」における 数学的な思考力・表現力を育む算数科学習指導と評価 －解決方法を考え説明する算数的活動を通して－ | 17 |
| | 【授業研究 4】 | |
| | 中学校第 2 学年「連立方程式」における 数学的な思考力・表現力を育む数学科学習指導と評価 －連立方程式を解く手順を説明する活動を通して－ | 29 |
| | 【授業研究 5】 | |
| | 中学校第 2 学年「一次関数」における 数学的な思考力・表現力を育む数学科学習指導と評価 －表、式、グラフを関連付け、一次関数の特徴を説明する活動を通して－ | 35 |
| | 【授業研究 6】 | |
| | 高等学校第 3 学年数学Ⅲ「三角関数と極限」における 数学的な思考力・表現力を育む数学科学習指導と評価 －極限値の性質を活用して円の面積の公式を導出するための説明し伝え合う 活動を通して－ | 41 |
| | 【授業研究 7】 | |
| | 高等学校第 3 学年数学 C「極座標と極方程式」における 数学的な思考力・表現力を育む数学科学習指導と評価 －極方程式のグラフをかくための糸口を考える操作的活動を通して－ | 49 |
| 3 | 研究のまとめ | 57 |

算数・数学科研究主題

数学的な思考力・表現力を育む算数・数学科学習指導と評価 －ねらいを明確にした算数的活動・数学的活動を通して－

1 主題について

(1) 算数・数学科の目標について

学習指導要領では、算数・数学科の目標が次のように示されている。

「小学校算数科」 平成20年3月

算数的活動を通して，数量や図形についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け，日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え，表現する能力を育てるとともに，算数的活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き，進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる。

「中学校数学科」 平成20年3月

数学的活動を通して，数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し，それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。

「高等学校数学科」 平成21年3月

数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察し表現する能力を高め，創造性の基礎を培うとともに，数学のよさを認識し，それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。

(下線部は本資料作成者による。)

小・中・高等学校いずれも，その目標の文頭には，下線のように「算数的活動を通して」及び「数学的活動を通して」と示され，目標を実現するための学習指導の進め方の基本的な考え方が述べられている。そして，ねらいを明確にした「算数的活動」，「数学的活動」を手立てとして，数学的な思考力・表現力を育成することが求められている。

(2) 数学的な思考力・表現力について

中央教育審議会答申（平成20年1月）の改善の基本方針において，「数学的な思考力・表現力」について次のように示されている。

算数・数学科の改善の基本方針（抜粋）

- 数学的な思考力・表現力は，合理的，論理的に考えを進めるとともに，互いの知的なコミュニケーションを図るために重要な役割を果たすものである。このため，数学的な思考力・表現力を育成するための指導内容や活動を具体的に示すようにする。特に，根拠を明らかにし筋道を立てて体系的に考えることや，言葉や数，式，

図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決したり、自分の考えを分かりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実する。（下線部は本資料作成者による。）

数学的な思考力・表現力を育成するために下線で示した指導を充実することが示されている。これらは算数的活動・数学的活動を具体的に例示したものであり、(1)で述べたように、ねらいを明確にした指導が重要であると考え。また、指導を行うことでねらいとする力が確実に身に付いたかどうかを適切に評価し指導の改善に生かすことが、数学的な思考力・表現力を育むことにつながると考える。

(3) 研究の基本方針

平成21年度の研究では、全国的な調査の結果などから自分の考えたことを説明することに課題が見られたため、自分の考えを説明し伝え合う活動の場を位置付けた学習指導について研究を行った。また、平成23年度の研究では、説明し伝え合う活動を通して数学的な思考力・表現力を育む算数・数学科学習指導の展開について、実践的な研究を行った。これらの研究を通して、事実、方法、理由等について何をどのように説明すればよいかを理解させることができ、数学的な思考力・表現力を育むことができた。しかし、思考・表現したものをどのように評価するかについての追究は十分ではなかった。

今回の研究を進めるに当たって、算数・数学科における学習指導と評価についての実態調査を実施した。「思考力・表現力を育むために取り組んでいること」の回答結果から、説明し伝え合う活動が数学的な思考力・表現力を育むために必要であると考えて授業を展開していることが分かった。その一方で、「適切な評価規準の設定」及び「具体的な評価方法の設定」を挙げたのは2割程度であり、評価が思考力・表現力を育むための指導に十分に生かされていないことが分かった。

「評価を適切に行う上で課題となっていること」の設問に対しては、「学習状況における評価規準の設定」と答えている教師は、各校種ともおおむね4割となっている。また、「『おおむね満足できる』状況や、『十分満足できる』状況と判断される具体的な例などを想定した評価の実施」と答えている教師は、小・中学校で4割を超えている。これらのことから、評価規準の設定や評価の在り方に関しては課題として捉えている教師が多いことが分かった。つまり、「数学的な考え方」、「数学的な見方や考え方」についての評価の在り方に課題があると考え。

これまでの研究の成果及び実態調査の結果を踏まえ、ねらいを明確にした算数的活動・数学的活動に対して、学習評価を適切に行い効果的に指導に生かすことが重要であると考え、本主題を設定した。

(4) 主題に迫るために

- ア ねらいを明確にした算数的活動・数学的活動の工夫
- イ 学習評価を指導に生かす授業展開の工夫

この2点を踏まえ、具体的な手立てを講じた授業研究を行う。

資料 算数・数学科における思考力・判断力・表現力を育むための学習指導と評価について
の実態調査（数値は％）

- (1) 調査期間 平成25年3月1日から平成25年3月14日
- (2) 調査対象 県内公立小学校549校，公立及び県立中学校232校，県立高等学校100校
（太田第二高等学校里美校を含む），県立中等教育学校1校
- (3) 回答総数 578件（小学校343件，中学校142件，高等学校93件）
- (4) 回収率 65.5％

設問1 「数学的な思考力・表現力」を育むために取り組んでいること（複数回答可）

| | 小学校 | 中学校 | 高等学校 | 総数 |
|---------------------------|------|------|------|------|
| 課題の工夫 | 74.6 | 74.6 | 60.2 | 72.3 |
| 根拠を明らかにし筋道を立てて考えることの指導 | 76.4 | 62.7 | 59.1 | 70.2 |
| 自分の考えを説明したり，伝え合ったりすることの指導 | 96.5 | 90.1 | 37.6 | 85.5 |
| 適切な評価規準の設定 | 20.1 | 17.6 | 22.6 | 19.9 |
| 具体的な評価方法の設定 | 12.2 | 11.3 | 11.8 | 11.9 |
| 学習のねらいを明確にした授業 | 76.4 | 57.7 | 46.2 | 67.0 |
| 単元計画の工夫 | 17.5 | 12.0 | 18.3 | 16.3 |
| 単元構成の工夫 | 11.1 | 10.6 | 9.7 | 10.7 |
| 特になし | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| その他 | 2.6 | 0.7 | 0.0 | 1.7 |

小・中学校においては「自分の考えを説明したり，伝え合ったりすることの指導」が9割を超えている。また，「根拠を明らかにして筋道を立てて考えることの指導」が6割を超えている。一方，評価規準及び評価方法の設定，また単元計画及び単元構成の工夫については，各校種ともおおむね2割を下回っている。

設問2 「数学的な考え方」，「数学的な見方や考え方」について，評価を適切に行うために取り組んでいること（複数回答可）

| | 小学校 | 中学校 | 高等学校 | 総数 |
|--|------|------|------|------|
| 単元の評価規準の設定 | 54.2 | 44.4 | 17.2 | 45.8 |
| 学習活動における評価規準の設定 | 37.6 | 32.4 | 25.8 | 34.4 |
| 評価時期の設定 | 9.3 | 7.0 | 8.6 | 8.7 |
| 評価計画の作成 | 13.4 | 8.5 | 7.5 | 11.2 |
| 学習カードやワークシートの工夫 | 70.0 | 69.0 | 20.4 | 61.8 |
| 学習活動の観察 | 77.0 | 66.2 | 58.1 | 71.3 |
| ノートやワークシート等の記述の分析 | 77.6 | 70.4 | 48.4 | 71.1 |
| 「おおむね満足できる」状況や「十分満足できる」状況と判断される具体的な例などを想定した評価の実施 | 20.1 | 15.5 | 2.2 | 16.1 |
| 評価問題，テストの工夫 | 42.9 | 75.4 | 63.4 | 54.2 |
| 特になし | 0.0 | 0.7 | 2.2 | 0.5 |
| その他 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

小・中学校においては，「学習カードやワークシートの工夫」，「学習活動の観察」，「ノートやワークシート等の記述の分析」が6割を超えている。一方，「『おおむね満足できる』状況や『十分満足できる』状況と判断される具体的な例などを想定した評価の実施」は小学校においては2割であり，中学校においては2割を切っている。また，高等学校においては1割を大きく下回っている。「評価時期の設定」については，各校種ともに1割を切っている。

設問3 「数学的な考え方」，「数学的な見方や考え方」について，評価を適切に行う上で課題となっていること（複数回答可）

| | 小学校 | 中学校 | 高等学校 | 総数 |
|--|------|------|------|------|
| 単元の評価規準の設定 | 21.6 | 31.7 | 34.4 | 26.1 |
| 学習活動における評価規準の設定 | 41.1 | 38.0 | 39.8 | 40.1 |
| 評価時期の設定 | 15.7 | 19.0 | 8.6 | 15.4 |
| 評価計画の作成 | 32.1 | 27.5 | 19.4 | 28.9 |
| 学習カードやワークシートの工夫 | 24.5 | 23.9 | 17.2 | 23.2 |
| 学習活動の観察 | 19.8 | 28.9 | 14.0 | 21.1 |
| ノートやワークシート等の記述の分析 | 28.0 | 30.3 | 15.1 | 26.5 |
| 「おおむね満足できる」状況や「十分満足できる」状況と判断される具体的な例などを想定した評価の実施 | 46.1 | 45.1 | 23.7 | 42.2 |
| 評価問題，テストの工夫 | 28.9 | 29.6 | 40.9 | 31.0 |
| 特になし | 1.2 | 0.7 | 4.3 | 1.6 |
| その他 | 0.9 | 2.1 | 0.0 | 1.0 |

「学習活動における評価規準の設定」については，各校種ともほぼ4割となっている。また，小・中学校においては「『おおむね満足できる』状況や『十分満足できる』状況と判断される具体的な例などを想定した評価の実施」が4割半ばである。

設問4 「数学的な思考力・表現力」について評価を行う上で工夫していることがあれば，自由に記述してください。

工夫している点として，ノートやワークシート，評価問題，テスト，具体的な評価方法等が挙げられている。

ノートやワークシートの具体的な工夫としては，「ノートに考えを記述させ，その分析を教科部で行っている」，「定期的にノートを提出させ，評価を積み重ねる」等の記述が見られた。

評価問題やテストについては，「文章表現で答えさせる問題を取り入れている」，「文章記述を要する問題を必ず作成し，評価，指導の資料としている」等の記述が見られた。

具体的な評価方法の工夫については，「1時間の授業の中で，子どもに身に付けさせたい力を具体的に明示し，その手立てを考えること」，「評価規準の中に具体例を入れることにより評価しやすくしている」等の記述が見られた。

2 授業研究

【授業研究1】

小学校第6学年「円の面積」における数学的な思考力・表現力を育む算数
科学習指導と評価

—円の求積公式を既習の図形に帰着して考え、説明する活動を通して—

1 単元名 円の面積について調べよう

2 単元の目標と観点別評価規準

図形の面積を計算によって求めることができる。

| 算数への 関心・意欲・態度 | 数学的な考え方 | 数量や図形について の技能 | 数量や図形について の知識・理解 |
|--|--|---------------------------------|--|
| 円の面積の求め方を 既習の図形と関連付 けて求めようとして いる。 | 既習の図形の求積と 関連付けて円の面積 の求積方法を考えて いる。 | 円の求積公式を用い て面積を求めること ができる。 | 円の面積についての 豊かな感覚をもつと ともに、円の面積の 求め方を理解してい る。 |

3 単元の指導について

(1) 教材について

第5学年で、三角形や四角形など直線で囲まれた図形の面積の求め方について学習している。また、円については、円周の長さが(直径)×(円周率)で表されることを学習している。

本単元では、曲線で囲まれた図形である円について、面積の求め方を学習する。円を半径で等分割したおうぎ形を並び替え、平行四辺形など既習の図形に帰着して求積方法を考え説明する活動を行う。その際には、半径や円周と面積との関係について、図や具体物から考えながら公式を導き出していく。

(2) 児童の実態について (平成25年7月1日実施 調査人数27人)

5年生の学習内容である三角形や四角形の求積については9割を超す児童が、ひし形や台形の求積については6割程度の児童が身に付けていることが分かった。しかし、「直径×3.14」を「半径×2×3.14」で表すことができた児童は12人であり、式の変形を苦手としている児童は半数を超えている。そこで、操作活動を行ったり、ヒントカードを用いたりして、半径と円周に着目しながら円の公式を導き出していく。

4 単元の指導計画 (7時間扱い)

第1次 円の面積の見積もり・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・2時間

第2次 円の面積を求める公式・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・2時間

| 時 | 学習内容・活動 | 関 | 考 | 技 | 知 | 観点別評価規準 |
|--------------|---------------------|---|---|---|---|--|
| 1 2 本時 | 既習の図形に変形して円の面積を考える。 | | ◎ | | | 既習の図形の求積公式を基に、半径や円周を使って面積を求める式（円周÷2×半径）を考え、説明している。 |

第3次 円の求積公式の活用・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・2時間

第4次 練習問題・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・1時間

5 本時の指導

(1) 目標

円を平行四辺形などの既習の図形に等積変形する活動を通して、円の面積の求め方を考え、説明することができる。

【評価の視点】

「おおむね満足できる」状況

おうぎ形に切って並び替えた図を手がかりに、既習の図形の求積公式を基に、半径や円周を使って面積を求める式（円周÷2×半径）を考え、説明している。

「十分満足できる」状況

既習の図形への等積変形を基に、面積を求める簡潔な公式（半径×半径×円周率）を考え、説明している。

(2) 主題に迫るための手立て

ア ねらいを明確にした算数的活動の工夫

既習の図形への等積変形を基に、面積を求める簡潔な公式を考え、説明することができるようにすることが、この授業のねらいである。そのねらいを達成するために、円をおうぎ形に等分した操作キットを全員に用意し、既習の図形に変形する活動を取り入れる。操作しやすいこと及び半径や円周に着目しやすいことを考慮し、おうぎ形は8等分とする。既習の図形に変形できない児童には、枠を示したヒントカードを用意し、枠の中に並び替えるように助言する。また、既習の図形の公式から円の求積公式に変形できない児童には、穴埋め式のヒントカードを用意し、同じ考えのグループで説明し合う活動を取り入れる。

イ 学習評価を指導に生かす授業展開の工夫

「指導に生かす評価」として、自力解決における操作活動の様子及びワークシートの記述の分析から児童の学習状況を見取り、その場の指導に生かすようにする。特に「努力を要する」状況の児童に対しては、状況に応じてヒントカードを与えるなど、個別に対応する。

ワークシートの記述内容に対しての評価は、評価の視点に照らし合わせて行い、それぞれの学習過程における学習状況を把握するようにし、その場の指導と次時以降の指導に生かすようにする。

(3) 準備・資料

操作キット、ワークシート、ヒントカード、ネームプレート、付箋

(4) 展開

| 学習活動・内容 | 指導上の留意点・評価 |
|---|---|
| <p>1 本時の学習課題をつかむ。</p> <p>学習問題</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> 円の面積を計算で求める方法を考えよう。 </div> <p>学習課題</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> 円を既習の図形に変形して、円の面積を求める式を考えよう。 </div> <p>2 円を8等分したおうぎ形を並び替え、面積の求め方を式で表す。</p> <p>3 自分の考えをグループで説明し合う。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・平行四辺形 ・ひし形 <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>・長方形</p>  <p>・三角形</p>  </div> <div style="text-align: center;">  <p>・台形</p>  </div> </div> <p>4 それぞれの考え方について全体で話し合う。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・平行四辺形＝底辺×高さ $= (\text{円周} \div 2) \times (\text{半径})$ $= \text{半径} \times \text{半径} \times \text{円周率}$ ・ひし形＝対角線×対角線÷2 $= (\text{半径} \times 4) \times (\text{円周} \div 4) \div 2$ $= \text{半径} \times \text{半径} \times \text{円周率}$ ・長方形 ・台形 ・三角形 <p>5 本時のまとめをする。</p> <p>6 公式を使って問題を解く。</p> <p>7 学習の自己評価をする。</p> | <ul style="list-style-type: none"> ・既習の図形と面積の求め方を想起させる。 ・円を既習の図形に変形できないか投げかける。 ・既習の図形の求積公式を確認する。 <p>2</p> <ul style="list-style-type: none"> ・円を8分割した操作キットを準備し、既習の図形へと並び替えながら考えられるようにする。 <p>3</p> <ul style="list-style-type: none"> ・並べ方を見取り、同じ考えの児童同士でグループを作る。並び替えのできない児童は、平行四辺形のグループに入れる。 ・分からない部分も含めて発表させ、自分の考えを修正した部分は、青で囲むように指示する。 ・並び替えた図形のそれぞれの部分の長さが、円のどの部分の長さになっているか、考えの根拠を明らかにして説明するよう助言する。 <p>4</p> <ul style="list-style-type: none"> ・等積変形した図と、求積の式を発表し、式について比較検討する。 ・話し合いを通して、既習の図形の公式から、半径を使った言葉の式へと変形させ、簡潔な公式へと導く。 ・共通点について話し合い、どの図形からも「半径×半径×円周率」の式へ変形できることを押さえる。 <p>④ 円の面積の求め方を考え、説明している。 (ワークシート記述の観察)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・面積の簡潔な求め方について、自分の言葉でまとめるように促す。 ・本時の学習を振り返る。 |

6 授業の実際

(1) ねらいを明確にした算数的活動の工夫

ア 既習の図形に帰着させる学習課題

曲線で囲まれた円を既習の図形に変形するために、操作活動すること及び式の変形を整理していくことを通して、どの考え方でも円の面積を求める公式が「半径×半径×円周率」となるおもしろさを味わうことができたようにした。資料1のように、円を8等分したおうぎ形を変形して面積を求める課題にしたことで、既習の形に帰着しやすい活動となり、面積の公式を導くための手立てとなった。

イ 操作キットの活用

円を8等分したおうぎ形を並び替え既習の図形に近い形を作り、資料2に示す円の面積を求める活動を行った。8枚のおうぎ形の並び替えであり、平行四辺形やひし形などの直線で囲まれた図形と見なせるかどうか懸念されたが、おうぎ形の弧の部分と半径の部分が分かりやすかったので、円周や半径に着目した式に表すことができた。図形の変形につまずく児童には、資料3に示すヒントカードの図形枠に収まるように、8枚のおうぎ形を並び替えるように助言した。操作キットを活用した全員が、平行四辺形、ひし形、三角形、台形のいずれかの図形に変形することができた。この時点で、「十分満足できる」状況の児童は1人、「おおむね満足できる」状況の児童は20人、「努力を要する」状況の児童は6人であった。

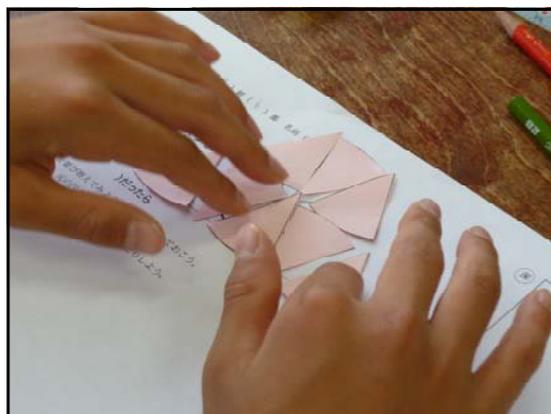
ウ 同じ考えのグループで説明する活動

自力解決時に、帰着した図形ごとに色分けした付箋を教師がワークシートに貼っておき、同じ考えをもつ児童のグループ分けが円滑にできるようにした。自力解決の後に、同じ考えの児童同士でグループを作り、自分の考えを説明し合う活動を取り入れることで、自分の考えを深めるようにした。お互いの考え方を説明し合うことで自分の考えを確認したり、友達からの助言で自分の考えを見直したりすることができた。これらの活動を通して、ほぼ全員が半径と円周を使って式に表すことが

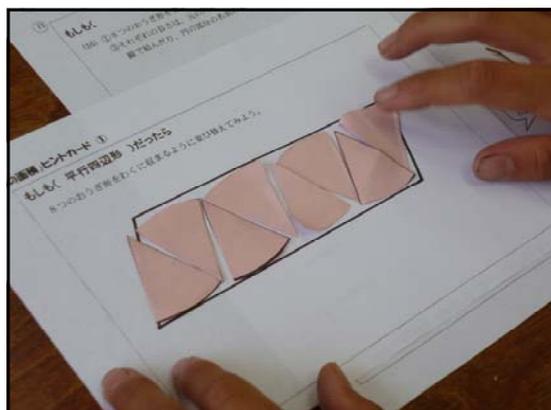
資料1 学習課題



資料2 操作している様子



資料3 ヒントカードの活用

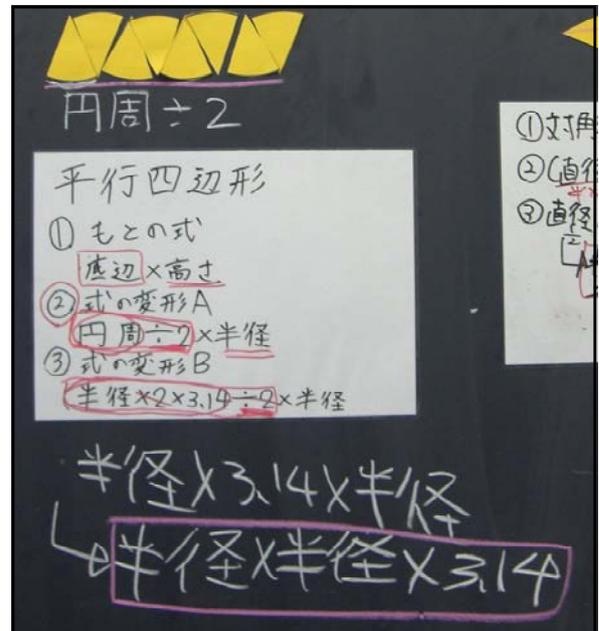


ができた。活動後には、「十分満足できる」状況の児童が6人、「おおむね満足できる」状況の児童が20人、「努力を要する」状況の児童が1人となった。

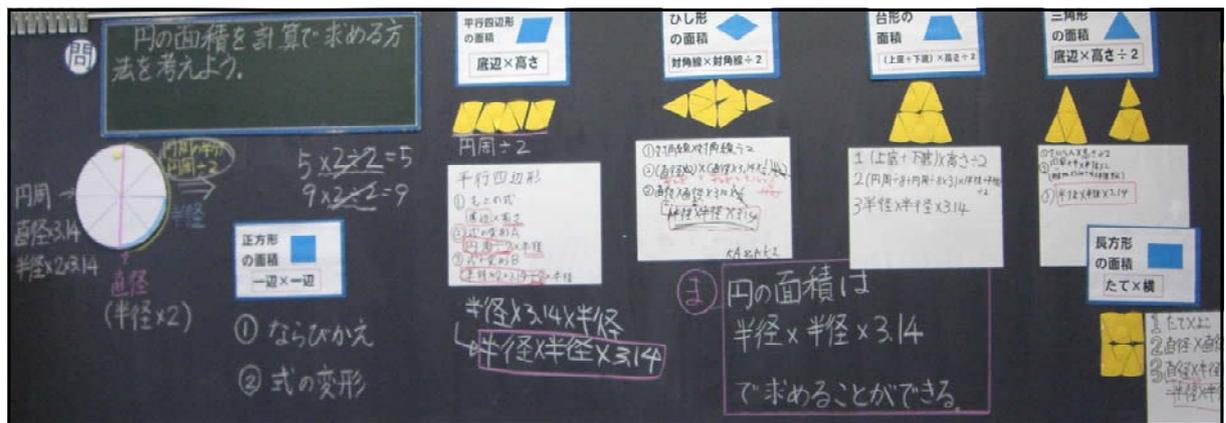
エ 既習の図形の求積公式から円の求積公式への変形

児童の実態から、式変形につまずくことが予想されたので、穴埋め式のヒントカードを活用し、既習の図形の求積公式から円の求積公式を導き出せるようにした。まず、図形の求積公式を書き込み、底辺や高さ等を円周や高さに置き換えて、「円周÷2×半径」の式を導き出した。さらに、「円周」の言葉を使わず「半径」と「円周率」のみで表すことで、資料4のように「半径×半径×円周率」の簡潔な式に変形することができた。資料5は全体での比較検討場面で式の変形や考え方の共通点について確認した際の板書である。このときの話し合いを通して、全員が「どの図形に変形しても同じ公式になる」ことを理解することができた。授業後にワークシートの記述を見取ると、「十分満足できる」状況の児童は26人、「おおむね満足できる」状況の児童は1人であった。以上のア～エを通して、既習の図形に等積変形する活動を通して、円の面積の求め方を考え説明することができるようになり、数学的な思考力・表現力を育むことができたと考える。

資料4 求積公式への式変形



資料5 比較検討場面



(2) 学習評価を指導に生かす授業展開の工夫

それぞれの学習過程における児童の学習状況が分かるようにワークシートを作成した。それを使用することで、一人一人の学習状況を見取り、指導に生かすことができた。まず、自力解決では、操作活動の様子及びワークシートの記述内容の観察から児童の学習状況を見取り、「努力を要する」状況である児童にヒントカードを与えることで、「おおむね満足できる」状況に改善することができた。

同じ考えのグループにおける比較検討では、話し合いで気付いたことなどを青字でワークシートに記述するようにした。その記述から話し合いを通してどのように「おおむね満足できる」状況、「十分満足できる」状況に達成したかを評価することができた。自分と異なる既習の図形に帰着した考えについて記述した児童は12人、式変形について記述した児童は15人いることが、ワークシートの記述から見取ることができた。

7 成果と課題

(1) 成果

操作キットを活用したことで、既習の図形に帰着して考え、説明することができた。また、同じ考えのグループを作り、説明する活動を取り入れたことで、話し合いが焦点化され、考えの整理に役立った。さらに、ヒントカードを基に、円周や半径を使って式に表すことで、図と式を結び付けて公式を導き出すことができようになり、数学的な思考力を育むことができた。

資料6は児童のワークシートの記述の様子である。このワークシートの見取りを評価の視点

に照らし合わせて行うことで、視点を絞り、根拠をもって評価することができた。「十分満足できる」状況と「おおむね満足できる」状況という評価の視点をもつことで、本時の中で身に付けさせたい力が明確になり、数学的な思考力・表現力を育むことにつながった。また、評価規準に基づく指導は、一学年複数学級や少人数指導等を担当する教師の評価のずれを少なくし、妥当性や信頼性を高めることにつながった。

(2) 課題

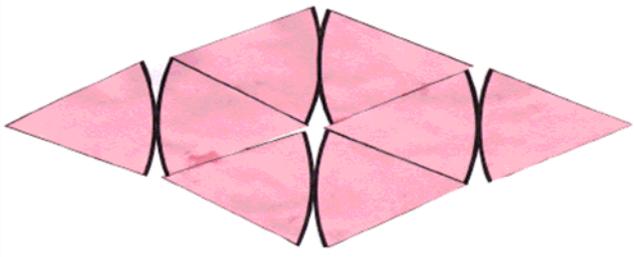
式変形をする際、底辺や高さの部分が半径や円周の一部にあたると分かっているにもかかわらず式変形できない児童が多かった。式を読む、式を言い換える活動を更に充実させていきたい。また、同じ考えのグループ分けに手間がかかった。TTを活用したり、児童同士でグループ作りをしたりするなど、工夫が必要である。

「十分満足できる」状況と「おおむね満足できる」状況の視点で毎時間評価することは負担が大きい。指導に生かす評価を日常的に行いながら、学習のまとまりで記録を残し、その時間でどの観点の評価をどのように行うのかという評価の焦点化を図り、効果的・効率的な学習評価を目指したい。

資料6 ワークシートの記述の様子

もしも(ひし形)だったら

(図) ①8つのおうぎ形を並び替えてみよう。 → ②貼っておこう。
③それぞれの長さは、元の円のどの部分だろう。
線で結んだり、円の部分の名前の書き込みをしよう。



(式) 公式を変形させよう。

① もとの式
対角線×対角線÷2

② 式の変形A
半径×4×(円周÷8×2)÷2(直径×2)×(直径×3.14× $\frac{1}{2}$)÷2

③ 式の変形B
半径×4×(半径×2×3.14÷8×2)÷2
直径×直径×3.14× $\frac{1}{2}$ → 半径×半径×3.14

グループ活動で、式を直したりつけたりしてみよう。(裏でかこんでおこう。)

円周、直径、半径を使って表してみよう。(変形A)

半径で表してみよう。(変形B)

【授業研究 2】

小学校第6学年「円の面積」における数学的な思考力・表現力を育む算数科 学習指導と評価

－複合図形の求積方法について図と式を関連付けて考え、説明する活動を通して－

1 単元名 円の面積について調べよう

2 単元の目標と観点別評価規準

図形の面積を計算によって求めることができる。

| 算数への 関心・意欲・態度 | 数学的な考え方 | 数量や図形について の技能 | 数量や図形について の知識・理解 |
|--|--|---------------------------------|--|
| 円の面積の求め方を 既習の図形と関連付 けて求めようとして いる。 | 既習の図形の求積と 関連付けて円の面積 の求積方法を考えて いる。 | 円の求積公式を用い て面積を求めること ができる。 | 円の面積についての 豊かな感覚をもつと ともに、円の面積の 求め方を理解してい る。 |

3 単元の指導について

(1) 教材について

児童は、第5学年までに複合図形の面積や体積について学習している。長方形や直方体に着目し、複合図形を分割したり補充したりして面積や体積の求め方を考えてきた。円の面積の活用では、半円やおうぎ形など円の一部である図形を組み合わせた複合図形の求積について取り扱う。既習の図形を見だし組み合わせることで、求積方法を図と式を関連付けて考えるようにする。

そして、自分の考えを説明する活動を通して、円の面積の求め方についての見方を広げられるようにし、既習事項を基に筋道を立てて説明する力を育てていきたい。

(2) 児童の実態について（平成25年7月1日実施 調査人数27人）

6割の児童が公式を活用して計算で円周を求める力を身に付けていることが、児童の実態調査から分かった。しかし、円の複合図形の周の長さになると、正答した児童は3人のみで、無答は3割近くであった。複合図形の周の長さを表す式を選択する問題では、正答は3割であった。複合図形の中から既習の図形に着目する見方や考え方が未熟であると考えられる。そこで、既習の図形を組み合わせることで円の複合図形を作り、図の式・数の式に表し、関連付けていく活動を取り入れる。

4 単元の指導計画（7時間扱い）

- 第1次 円の面積の見積もり・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2時間
第2次 円の面積を求める公式・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2時間

第3次 円の求積公式の活用・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2時間

| 時 | 学習内容・活動 | 関 | 考 | 技 | 知 | 観点別評価規準 |
|---------|--------------------------|---|---|---|---|---|
| 1 | おうぎ形の面積の求め方を理解する。 | | | | ◎ | おうぎ形の面積の求め方を理解している。 |
| 2 本時 | 既習の図形を見出し、円の複合図形の面積を考える。 | | ◎ | | | 既習の図形に着目し、操作キットを操作しながら面積の求め方を考え、図や式で説明している。 |

第4次 練習問題・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1時間

5 本時の指導

(1) 目標

既習の図形に着目し、円の求積公式を活用して円の複合図形の面積の求め方を考え、説明することができる。

| |
|--|
| <p>【評価の視点】</p> <p>「おおむね満足できる」状況 既習の図形に着目し、操作キットを操作しながら面積の求め方を考え、図や式で説明している。</p> <p>「十分満足できる」状況 既習の図形に着目し、面積の簡潔な求め方を考え、図の式と数の式とを関連付けて説明している。</p> |
|--|

(2) 主題に迫るための手立て

ア ねらいを明確にした算数的活動の工夫

既習図形を用いた操作キットを児童全員に用意し、木の葉形を作る操作活動を取り入れる。視覚的に捉えやすいように、図形の種類ごとに色別にする。既習の図形を用いて木の葉形を作る活動を通して、既習の図形に着目し、図の式や数の式で面積の求め方を考えるための手立てとする。また、図と式を関連付ける活動を意図的に位置付ける。自力解決や比較検討場面においては、図から式を導いたり、式を読み取って図に照らし合わせたりする活動を行う。以上の活動を通して、数学的な思考力・表現力を育むようにする。

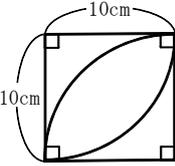
イ 学習評価を指導に生かす授業展開の工夫

複合図形の求積方法を示した図の式や数の式からは、筋道を立てて考える力を評価する。「指導に生かす評価」として、自力解決における操作活動の様子と立式の記述を見取る。ワークシートでは、見通し、自力解決、比較検討、振り返りと学習過程ごとに記述できるようにし、それぞれの過程の学習状況を把握し、その場の指導に生かすようにする。「努力を要する」状況の児童に対しては、指定した図形を使って操作するよう助言し、「おおむね満足である」状況に改善できるようにする。

(3) 準備・資料

操作キット、ワークシート、練習問題プリント、ネームプレート、付箋

(4) 展開

| 学習活動・内容 | 指導上の留意点・評価 |
|---|---|
| <p>1 本時の学習課題をつかむ。</p> <p>学習問題</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">木の葉形の面積の求め方を考えよう。</div>  <p>学習課題</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">木の葉形から既習の図形を見出し、面積の求め方を考え、説明しよう。</div> <p>2 既習の図形を並び替え、図を用いた式や数の式で表す。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 図を用いた式で表す。 ・ 式のみで表す。 <p>3 グループで説明し合う。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ $(\text{おうぎ形} - \text{三角形}) \times 2$ ・ $\text{正方形} - (\text{正方形} - \text{おうぎ形}) \times 2$ ・ $\text{おうぎ形} \times 2 - \text{正方形}$ <p>4 全体で話し合う。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 図を用いた式の考え方について検討する。 ・ 式から求積方法を読み取る活動について検討する。 <p>5 面積の求め方を確認する。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ どの求め方も既習の図形を組み合わせで求めていることを確認する。 <p>6 円の複合図形の求積問題を解く。</p> <p>7 学習の自己評価をする。</p> | <ul style="list-style-type: none"> ・ 木の葉形からどんな図形が見いだせるか記述することで、解決への見通しの手掛かりとなるようにする。 ・ 見いだした図形を発表し合い、図形の見方の共有化を図る。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 見いだした図形の面積の求積方法と値を確認する。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 並び替えから考えた方法を、図を用いた式に表すように指示する。 ・ 図の式を数の式に変形するように助言し、図と数の式を関連付けるよう促す。 ・ ワークシートの記述を見取り、同じ考えの児童同士でグループを作る。 ・ 分からない部分も含めて発表させ、自分の考えを修正した部分は、青で囲むように指示する。 ・ 操作キットで作った木の葉形と図の式、数の式を発表する。 ・ 求積方法は、少なくとも2つの方法を取り上げる。その際、一方は図から式へ、もう一方は式から図へ説明する活動を取り入れる。 ・ 参考になった友達の考えを1つ選んでまとめるように指示する。 <p>㊦ 円の複合図形の求積方法を考え、説明している。(ワークシート記述の観察)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 話し合いを通して考え方を類型化し、既習の図形を抜いたり重ねたりして木の葉形を形成し、面積を求めることができることを押さえる。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 本時の学習を振り返る。 |

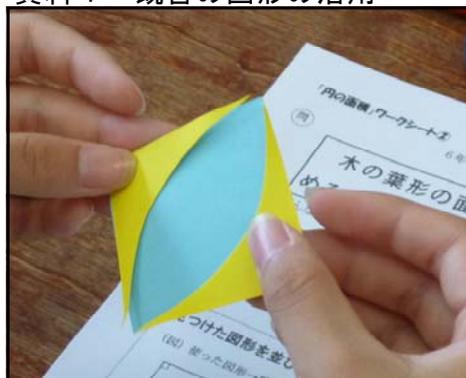
6 授業の実際

(1) ねらいを明確にした算数的活動の工夫

ア 既習の図形を活用した学習課題

複合図形のおもしろさは、図の中から既習の図形を見いだすこと、見えなかったものが見えるようになることである。資料1は、児童が既習の図形を組み合わせて木の葉形を作っている様子である。今まで経験してきた分割や補充の考えの他に、図形の一部と考えたり重ねて考えたりすることで、木の葉形を作ることができた。また、正方形や三角形、おうぎ形などの求積を省略し、これらの図形の組合せに焦点を当て、図や式に表し説明する活動を行うことで、既習の図形に着目させることができた。

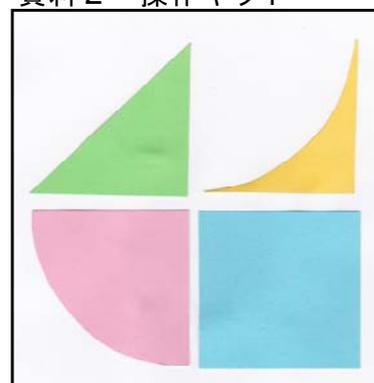
資料1 既習の図形の活用



イ 「操作キット」の活用

資料2は、正方形やおうぎ形、三角形、おうぎ形の余白を色別に切った操作キットである。これを操作しながら木の葉形を作る活動を行った。それぞれの形を色別にしたことから、どの既習図形を使っているかを視覚的に捉えることができ、図の式や数の式を考える手立てとなった。また、木の葉形を作ることにつまづいている児童には、おうぎ形の余白を使って考えるように助言した。

資料2 操作キット

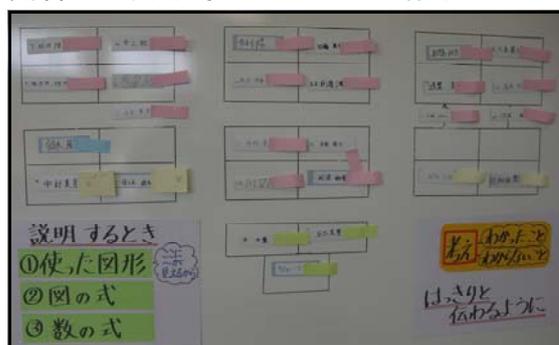


操作キットを活用しての自力解決では、「十分満足できる」状況の児童が12人、「おおむね満足できる」状況の児童が6人、「努力を要する」状況の児童が9人であった。

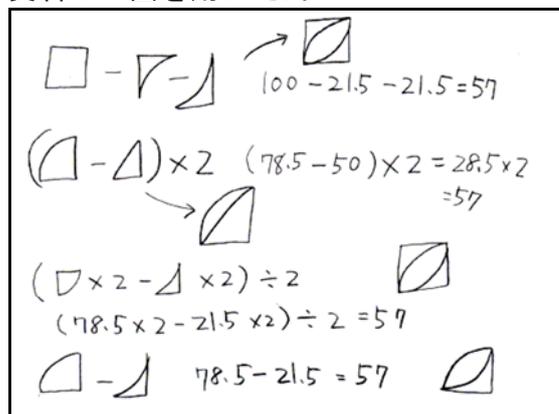
ウ 同じ考えのグループで説明する活動

自力解決の後に、同じ考えの児童同士でグループを作り、自分の考えを説明し合う活動を取り入れた。資料3はグループ作りを指示する際に用いたホワイトボードである。この活動を通して、全員の児童が操作したことを図を用いた式に表すことができた。資料4はその一例である。また、説明することで、自分の考えを確認したり、友達からの助言で自分の考えを見直したりできた。この活動を通して、「十分満足できる」状況の児童

資料3 同じ考えのグループ作り



資料4 図を用いた式

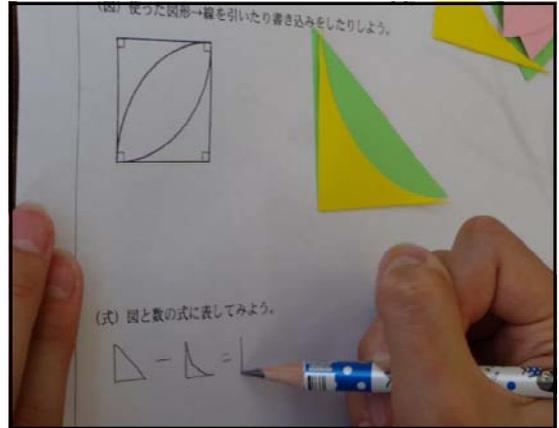


が22人に増え、「おおむね満足できる」状況の児童が5人となった。

エ 図と式を関連付ける活動

まず、木の葉形を操作キット（資料2）の4つの図形を組み合わせて作る活動を行った。そこから資料5に示す図と式を関連付ける活動を行った。比較検討場面においては、「いらぬ部分を抜きとる方法」の他に、「半分の木の葉形を作る方法」、「重なりから木の葉形を作る方法」などの考え方が出された。4つの図形を組み合わせ、図を用いた式に表してから数の式で数値を示す流れで説明するよう指示した。一方で、数の式だけ発表させてから求積方法を読み取り説明する活動も取り入れた。数の式が示す図形を見付け、図の式に表し、キットを操作して求積方法を説明することができた。また、4枚の操作キットから3枚の操作キットに減らして考えるなど、より簡潔な求め方も出された。振り返りでは、組合せ方の工夫を記述した児童が14人見られた。

資料5 図と式を関連付けている様子



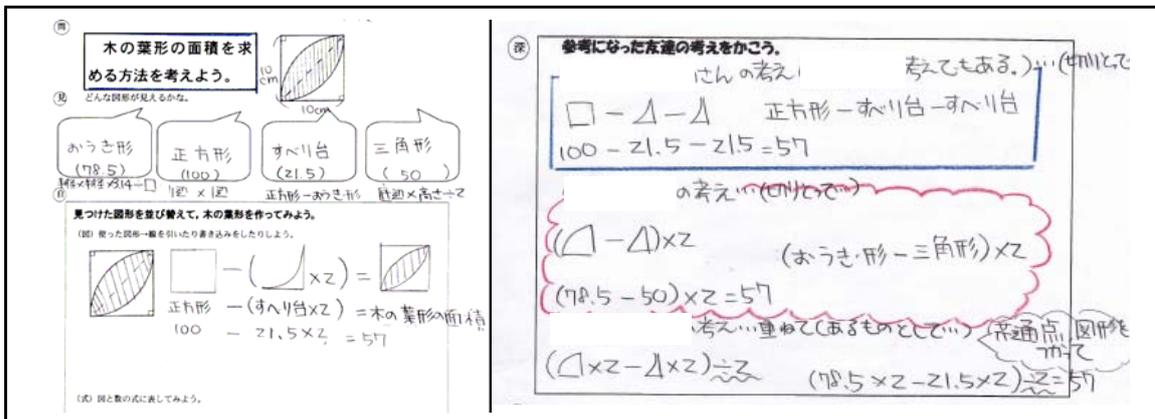
以上のア～エを通して、既習の図形に着目して円の複合図形の面積の求め方を考え説明することができるようになり、数学的な思考力・表現力を育むことができた。

(2) 学習評価を指導に生かす授業展開の工夫

授業の中で、児童全員の思考力・表現力を評価することは難しいため、ワークシートを評価の一助として用いた。見通し、自力解決、比較検討、振り返りと学習過程ごとに考え方を記述できるように工夫した。また、グループ活動で、付け加えた考えや友達からの助言で分かったことは青鉛筆で囲むこととし、自力解決の考えと区別できるようにした。資料6に示すワークシートの記述から、それぞれの児童の学習過程ごとの学習状況を見取ることができるため、評価規準に照らし合わせてその場で指導したり、授業後にはどの段階で「おおむね満足できる」状況や「十分満足できる」状況になったのかを児童ごとに把握したりすることが可能となった。

練習問題では、複合図形の図を提示し、求積方法を図の式と数の式で記述するようにし、ワークシートの記述内容と合わせて、筋道を立てた考えについて評価した。

資料6 ワークシートの記述



7 成果と課題

(1) 成果

操作キットを活用して、既習の図形に着目しながら、木の葉形の求積方法を考えることができた。また、同じ考えのグループで説明する活動を通して、図を式に表すことが苦手な児童が、立式することができた。さらに、求積方法を図の式、数の式に表す活動を通して、自分の考えを筋道立てて表現することができるようになり、数学的な思考力・表現力を育むことができた。

操作活動や考えを説明する活動など、算数的活動の様子を教師が評価の視点をもって見取ることで、後の指導に生かすことができた。また、評価の視点については、既習事項の図形の組合せ方を示した模範解答を作成した。評価の根拠を明確にしたことで、評価の妥当性の向上にもつながったと考える。さらに、児童の自己評価（振り返りの記述）も加味することで、児童自身が学習の定着状況を確認し、次の学習に意欲的に取り組めるようになった。

(2) 課題

操作キットを活用することなしに、図に補助線を書き込んだり、既習事項の図形の組合せを考えたりできるような指導を工夫していきたい。

思考力や判断力についての評価の視点の作成では、「十分満足できる」状況と「おおむね満足できる」状況の判断に悩む部分が多かった。評価の妥当性・信頼性を向上させる評価の在り方について研究を進めていきたい。

【授業研究3】

小学校第6学年「速さ」における数学的な思考力・表現力を育む算数科学習指導と評価

－解決方法を考え説明する算数的活動を通して－

1 単元名 速さ

2 単元の目標と観点別評価規準

速さについて理解し、求めることができる。

| 算数への 関心・意欲・態度 | 数学的な考え方 | 数学的な技能 | 数量や図形について の知識・理解 |
|--|---|---|--|
| 速さを、単位量当たり の大きさを用いて数値 化したり、実際の場面 と結び付けて生活や学 習に活用したりしよ うとしている。 | 速さの比べ方や求め方 を考えている。 $(速さ) = (長さ) \div (時間)$ を用いて、長さや時間 の求め方を考えてい る。 | $(速さ) = (長さ) \div (時間)$ を用いて、長さや時間 から速さを求めたり、 速さと時間から長さを 求めたり、長さや速さ から時間を求めたりす ることができる。 | 速さは単位量当たりの大 きさとして表すことがで きることを理解してい る。 |

3 単元の指導について

(1) 教材について

これまで、異種の二つの量の割合について、第5学年では、部屋の混み具合や人口密度などを取り上げて指導している。第6学年では、異種の二つの量の割合である速さについて指導する。本単元では、速さを、単位時間当たりに移動する長さとして捉えたり、一定の長さを移動するのにかかる時間として捉えたりして比較する活動を行い、速さの意味や表し方について理解する。

また、速さについて $(速さ) = (長さ) \div (時間)$ という式で表されることを基に、速さ、道のり、時間を求めることなどが主なねらいとなっている。

(2) 児童の実態について（平成25年6月12日実施 調査人数15人）

「自分の考えを図や式を使って説明することができますか。」という質問について、できるが2人、どちらかと言えばできるが7人、どちらかと言えばできないが5人、できないが1人と回答するなど、自分の考えを筋道を立てて分かりやすく説明することについて苦手意識を持つ児童が見られた。また、「1mあたりの重さが8gのとき、72gの長さを求める。」という調査問題では正答10人、誤答5人という結果であり、演算を判断する力が身に付いていない児童が見られた。実際の場面と結び付けて指導することで、速さの意味や表し方についての理解を深めるとともに、速さを比較する学習課題を提示し、速さの比べ方や求め方を考え、説明する活動を取り入れる。

4 単元の指導計画（7時間扱い）

第1次 速さってなんだろう・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1時間

第2次 速さの表し方・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 4時間

| 時 | 学習内容・活動 | 関 | 考 | 技 | 知 | 観点別評価規準 |
|----------|--|---|---|---|---|---|
| 1 本時1 | 速さの比べ方を考え、説明する。 | | ◎ | | | 時間または道のりをそろえた速さの比べ方を考え、説明している。 |
| 2 | 速さを求める式を導き、「時速」、「分速」、「秒速」の意味や用い方を理解する。 | | | ○ | ◎ | ・速さを求める式を導き、「時速」、「分速」、「秒速」の意味を理解している。 ・速さを求めることができる。 |
| 3 | 速さと時間から道のりを求める方法を考え、説明する。 | | ◎ | ○ | | ・速さと時間から道のりを求める方法を考え、説明している。 ・道のりを求めることができる。 |
| 4 本時2 | 速さと道のりから時間を求める方法を考え、説明する。 | | ◎ | | | 速さと道のりから時間を求める方法を考え、説明している。 |

第3次 適応練習・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2時間

5 第2次第1時の指導

(1) 目標

速さの比べ方を考え、説明することができる。

【評価の視点】

「おおむね満足できる」状況

時間か道のりをそろえた速さの比べ方を説明している。

「十分満足できる」状況

時間か道のりをそろえた速さの比べ方を、根拠を基にして説明している。

(2) 主題に迫るための手立て

本時の目標に迫る学習課題と既習事項との関連に気付けるように課題提示の仕方を工夫する。また、自力解決において、自分の考えを言葉や数、式、図、表を用いて記述する算数的活動を取り入れたり、比較検討場面において、自分の考えをペアや一斉において説明し伝え合う算数的活動を取り入れたりする。

予想される児童の考えと評価規準を基に「おおむね満足できる」状況から「十分満足できる」状況へ改善する手立てや、「努力を要する」状況から「おおむね満足できる」状況へ改善する手立てを用意し、評価と指導の一体化を図る。自力解決場面では、「評価ボード」に児童一人一人の自力解決の方法を記載しながら評価に当たる。

(3) 準備・資料

ワークシート、ヒントカード、電子黒板、実物投影機

(4) 展開

| 学習活動・内容 | 指導上の留意点・評価 |
|---|---|
| <p>1 学習課題を知る。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>Aくんは40mを9秒，Bくんは40mを10秒，Cくんは50mを10秒で走りました。一番速いのはだれなのか比べ方を考え，説明しましょう。</p> </div> <p>2 自力解決をする。 <予想される児童の反応></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>AくんとCくんの速さの比較 (Bくんが一番遅いと判断した場合) 公倍数を用いて考える (ア) 90秒で比較 $A : 40m \times 10 = 400m$ $C : 50m \times 9 = 450m$ (イ) 200mで比較 $A : 9秒 \times 5 = 45秒$ $C : 10秒 \times 4 = 40秒$ 単位量当たりの大きさを用いて考える (ウ) 1秒で比較 $A : 40m \div 9 = 4.4m$ $C : 50m \div 10 = 5m$ (エ) 1mで比較 $A : 9秒 \div 40 = 0.23秒$ $C : 10秒 \div 50 = 0.2秒$</p> </div> <p>3 解決の方法について話し合う。 (1) ペアでの説明 (2) 一斉での説明 ①(ア)～(エ)の考え方の発表を聞く。 ②それぞれの考え方を比較する。</p> <p>4 本時のまとめをする。</p> <p>5 練習問題を解く。</p> <p>6 振り返りをする。</p> | <ul style="list-style-type: none"> • 本時の学習課題と日常の事象を関連付けることで，解決への目的意識を高める。 • 答えの見通しをもたせるため，2人ずつ比べることを助言する。 • 自分の考えが分かるように，図や式と関連付けながら，言葉でも記述するよう助言する。 • 机間指導をしながら，一人一人の解決方法を確認し，説明については，答えの根拠を記述するよう助言する。 • 公倍数を用いて比較している児童には何倍するのかに気を付けながら計算するよう助言する。 • 単位量当たりの大きさを比較している児童には，その単位量の大きさを記述するよう促す。 • 解決の見通しがもてない児童については，(ア)や(イ)の考え方のヒントカードを渡し，解決の糸口とする。 • 早く解決できた児童には，他の方法で考えたり，分かりやすい説明の仕方を考えたりするよう助言する。 • ペアにおいては，自分の考えを分かりやすく説明すること，相手の考えについて疑問点は質問をすることを確認する。 • それぞれの考え方を比較し，特徴を話し合うことで，どの方法でも解決できることを確認する。 • 「共通に使われている考え」という観点から話し合い，学習のまとめにつなげる。 ⑨時間または道のりをそろえた速さの比べ方を考え，説明している。 (ワークシート記述の観察) |

6 授業の実際

(1) ねらいを明確にした算数的活動の工夫

ア 本時の目標に迫る学習課題と既習事項との関連に気付かせる課題提示

本時の目標を「速さの比べ方を考え、説明することができる。」とし、思考力・表現力の育成にねらいを置いた。そこで、数値を十分に吟味し、現実的かつ比較しやすく計算しやすいものに設定し、学習課題を「Aくんは40mを9秒、Bくんは40mを10秒、Cくんは50mを10秒で走りました。一番速いのはだれなのか比べ方を考え、説明しましょう。」とした。また、プレゼンテーションソフトで動画を用いて課題提示を行った。更に、学習課題の数値について表を利用して整理することで、課題を把握しやすくするとともに、数値を比較しやすくすることができた。

見通しをもたせる場面において、「3人を一度に比べるのではなく、2人ずつ比較していこう。」と言葉掛けをすると、児童からは、「AとBでは、道のりが同じなので、時間が短いAの方が速い。」、「BとCでは、時間が同じなので、道のりが長いCの方が速い。」と意見が出たため、「1番速いのは、AかCのどちらかである。」という結果の見通しをもつことができた。また、同時に「道のり」や「時間」に着目して考えることができたことから、「公倍数で道のりや時間をそろえて比べる。」、「1秒間にそろえて、どれくらい走るか比べる。」などの、既習事項を基にした解決方法の見通しにもつなげることができた。

イ 自分の考えを記述する算数的活動

自分の考えについて、「考え（図、式など）」、「答え」、「説明」を整理して記述するようにした。まず、解決の方法の見通しに沿って、図や式をかき、答えを出す。次に、図や式と関連付けながら考えの説明を書くようにした。また、「答えの理由が分かる書き方のキーワード」をワークシートに載せ、自分の考えを根拠を明らかにして説明するために利用できるようにした。

資料1は、公倍数を用いて道のりを200mにそろえて速さを比べた児童の考えである。表を利用して公倍数を見つけ出し、200mを走る時間で速さを比べる過程を表と関連付けて記述することができた。また、資料2

(p. 21)は、1m走るのにかかる時間で速さを比べた児童の考えである。時間÷道のりから1m走るのにかかる時間を求め、一番時間がかからないか

資料1 公倍数を用いて速さを比べた考え

問 Aくんは40mを9秒、Bくんは40mを10秒、Cくんは50mを10秒で走りました。一番速いのはだれなのか比べ方を考え、説明しよう。

答 考え(図、式など)

| | | | | | |
|------------|----|----|-----|-----|-----|
| 道のり (m) | 40 | 80 | 120 | 160 | 200 |
| 時間 (秒) | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 |

| | | | | | |
|------------|----|-----|-----|-----|-----|
| 道のり (m) | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 |
| 時間 (秒) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |

| | | | | | |
|------------|----|----|-----|-----|-----|
| 道のり (m) | 40 | 80 | 120 | 160 | 200 |
| 時間 (秒) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |

答え Cくんの方が速い。

説明(理由) Aくんは、Cくんの方が速い。理由は、Aくんは道のりをそろえて、40と50の公倍数の200mを走る時間を比べました。すると、Aくんは200mを45秒、Cくんは200mを40秒で走ることになるので、Cくんの方が速いと思いました。

考えの理由が分かるように説明を書こう。

～で比べると

だから

…

ので

らという根拠を基に，思考過程を言葉で記述することができた。

このように，児童は解決の見通しを基に，速さの比べ方について考え，「答えの理由が分かる書き方のキーワード」を利用し，自分の考えを図や式，表などに関連付けて，言葉で説明を記述することができた。

ウ 自分の考えを説明し伝え合う算数的活動

隣の児童とペアを組み，自分の考えを説明する活動を行った。児童は自力解決の際に記述した考えを基にして説明を行うことができた。自分の考えとして記述した「考え（図，式など）」の部分を指し示しながら説明をする児童も見られた。ペアによる考えの説明についての評価として「説明チェック表」を利用し，ペアの相手の説明について評価を行った。資料3は，その評価の結果である。「表や式の意味がよく分かった」，「比べ方がよくわかった」のどちらか質問に対しても，「当てはまる」と答えた児童が多く，ペアの相手の説明が理解できたと考える。このことから，児童は自力解決の際に記述した考えの「説明」を基にして，「考え（図，式）」の部分と関連させながら，根拠を明らかにして説明することができたと考える。

一斉による比較検討においては，電子黒板と実物投影機を利用して，発表者の自力解決における自分の考えを記述した「考え（図，式）」を投影し，資料4に示す4つ考え方の説明を行った。「共通に使われている考え」という観点から話し合いを行い，児童は，「同じ時間または同じ道のりにそろえて比べている」という共通点に気付き，まとめることができた。

(2) 学習評価を指導に生かす授業展開の工夫

ア 一人一人の解決方法に応じた評価活動

予想される児童の考えと評価規準を基に具体的な手立てを講じた。「おおむね満足できる」状況から「十分満足できる」状況にするための手立てや，「努力を要する」状況から「おおむね満足できる」状況にするための手立てを用意し，「評価ボード」に児童一人一人の自力解決の方法を記録しながら評価に当たった。特に，「十分満足できる」と判断できる基準を「速さの比

資料2 1m走るのにかかる時間で比べた考え

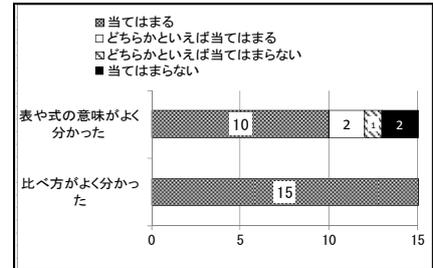
考え(図, 式など)
1m走るのにかかる時間
A $9 \div 40 = 0.225$
B $10 \div 40 = 0.25$
C $10 \div 50 = 0.2$

| | 道のり(m) | 時間(s) |
|---|--------|-------|
| A | 40 | 180 |
| B | 40 | 160 |
| C | 50 | 250 |

答え (君が一番速い)

説明しつづける
答えはC君が一番速い
理由は，A君は1m走るのにかかる時間が0.225秒，B君は0.25秒，C君は0.2秒です。だからC君が一番1m走ると時間がかからないのでC君が一番速いです。

資料3 ペアによる説明と評価



資料4 発表者の考え

- 「公倍数を用いて考える」
- (ア) 90秒で比較
 - (イ) 200mで比較
- 「単位量当たりの大きさを用いて考える」
- (ウ) 1秒で比較
 - (エ) 1mで比較

べ方を考え、根拠を基にして説明している。」として、自力解決における自分の考えを言葉で記述する部分において、資料5のように、「だから…ので」と考えの根拠の記述を評価の判断の基準とした。

評価規準と具体的な手立てを基に、自力解決場面において、一人一人の児童へ助言し、評価を行った。資料6は、その評価の結果である。「努力を要する(C)」がなくなり、「十分満足できる(A)」が増えたことが分かる。

イ 「おおむね満足できる」状況から「十分満足できる」状況にするための手立て

資料7は児童1の記述の様子である。自力解決時に、根拠を基にして説明している記述が見られなかったため、「ワークシートに添付した答えの理由が分かる書き方」を確認した。「比べた数値からどのように判断したのか。」と問いかけたことで、「だから、Cくんは、同じ時間でAくんより50m進んでいるので」と付け加えることができた。また、根拠を基にした記述がない児童が他にもいたので、児童1と同様に答えの理由が分かる書き方を確認し、「何を基に比べていたのか。比べた数値からどう判断したのか。」を問いかけたことで、「1秒間に走る道のりが長いのはCくんなので」と付け加えることができた。

ウ 「努力を要する」状況から「おおむね満足できる」状況にするための手立て

解決の見通しがもてない児童2については、解決の糸口として公倍数を用いて考える方法のヒントカードを渡した。そして、「表に、時間と道のりを2倍、3倍…したときの数を書き込んでみよう。時間または道のりのどちらかの数値がそろったところで比べてみよう。」と助言した。児童2は、表を利用して公倍数を用いて考える方法で解決することができた。練習問題においては、資料8のように自分で表を書き、公倍数の考え方で解決することができた。

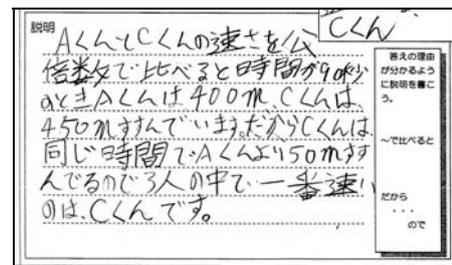
資料5 評価規準を基にした判断

公倍数を用いて道のりを同じにして比べると表から(式から)
 Aくん: 200mを45秒で走る。
 Cくん: 200mを40秒で走る。
だから、同じ道のりをCくんの方が短い時間で走るのだから、Cくんの方が速い。

資料6 自力解決場面における評価

| 評価 | 助言前(人) | 助言後(人) |
|----|--------|--------|
| A | 5 | 9 |
| B | 9 | 6 |
| C | 1 | 0 |

資料7 児童1の記述の様子



資料8 児童2の記述の様子

ヒントカード

| Aくん | |
|--------|-------------------|
| 時間(秒) | 9 18 27 36 45 |
| 道のり(m) | 40 80 120 160 200 |

| Cくん | |
|--------|----------------|
| 時間(秒) | 10 20 30 40 |
| 道のり(m) | 50 100 150 200 |

7 第2次第4時の指導

(1) 目標

速さと道のりの関係から時間を求める方法を考え、説明することができる。

【評価の視点】

「おおむね満足できる」状況

速さの意味と道のりから時間を求める方法を考え、説明している。

「十分満足できる」状況

速さを求める式や道のりを求める式、時間と道のりの関係を表した数直線から時間を求める式を考え、その方法を説明している。

(2) 主題に迫るための手立て

本時の目標に迫る学習課題と既習事項との関連に気付かせる課題提示の仕方を工夫する。自力解決場面においては、自分の考えを言葉や数、式、図、表を用いて記述する算数的活動を取り入れる。また、比較検討場面においては、自分の考えをペアや一斉において説明し伝え合う算数的活動を取り入れる。

予想される児童の考えと評価規準を基にした具体的な解決例を作成し、自力解決場面において指導と評価の一体化を図る。

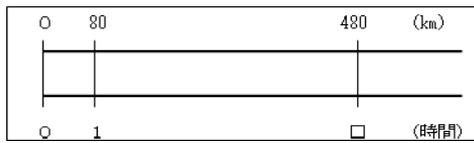
(3) 準備・資料

ワークシート、ヒントカード、電子黒板、実物投影機

(4) 展開

| 学習活動・内容 | 指導上の留意点・評価 |
|---|------------|
| <p>1 学習課題を知る。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>時速80kmで走っているバスがあります。</p> <p>このバスが480km進むのにかかる時間を考え、説明しましょう。</p> </div> <p>2 自力解決をする。</p> <p><予想される児童の反応></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>(ア) 速さを求める式から考える。</p> $480 \div \square = 80$ $\square = 480 \div 80$ $= 6 \quad \text{答え } 6 \text{ 時間}$ <p>(イ) 道のりを求める式から考える。</p> $80 \times \square = 480$ $\square = 480 \div 80$ $= 6 \quad \text{答え } 6 \text{ 時間}$ </div> | |

(ウ) 数直線から考える。



$$\square = 480 \div 80$$

$$= 6 \quad \text{答え} \quad 6 \text{時間}$$

(エ) 表を利用して考える。

| | | | | | |
|---------|----|-----|-----|-----|-----|
| 時間(時間) | 1 | 2 | 3 | ... | 6 |
| 道のり(km) | 80 | 160 | 240 | ... | 480 |

表から, 6時間 答え 6時間

3 解決の方法について話し合う。

(1) ペアでの説明

(2) 一斉での説明

① (ア) ~ (ウ) の考え方の発表を聞く。

② それぞれの考え方を比較する。

4 本時のまとめをする。

5 練習問題に取り組む。

6 振り返りをする。

・式を変形する際には, 時間を求めていることを明確にするため, $\square = 480 \div 80$ と記述するよう促す。

・解決の見通しがもてない児童については, (ウ) の考え方のヒントカードを渡し, 解決の糸口とする。

・机間指導をしながら, 一人一人の解決方法を確認し, 答えだけでなく, 時間を求める式についても記述するよう助言する。

・ペアにおいては, 自分の考えを分かりやすく説明すること, 及び相手の考えについての疑問点は質問して確認することを確認する。

・それぞれの考え方を比較し, 特徴を話し合うことで, どの方法でも解決できることを確認する。

・「共通している部分を見付ける」という観点から話し合い, 学習のまとめにつなげる。

⑧ 時間を求める方法を考え, 説明している。(ワークシート記述の観察)

8 授業の実際

(1) ねらいを明確にした算数的活動の工夫

ア 本時の目標に迫る学習課題と既習事項との関連に気付かせる課題提示

本時の目標を「速さと道のりの関係から時間を求める方法を考え, 説明することができる。」とし, 思考力・表現力の育成にねらいを置いた。そこで, 学習課題を「時速80kmで走っているバスがあります。このバスが480km進むのにかかる時間を考え, 説明しましょう。」とし, 表を利用して数値を計算するときに課題を把握しやすくなる数値にした。

見通しをもたせる場面においては, まず, プレゼンテーションソフトを利用し, 既習事項の確認を行った。「速さを求める式」と「道のりを求める式」を児童への発問で確認し, 前時の学習を想起させ, □を使った式を立てて考えるという解決の見通しをもたせるようにした。また, 速さの意味として, 「時速80kmは, 1時間に80km進む速さ」であることや「時間と道のりの関係を表した数直線」についても, 児童への発問で確認し, 本単元での学習内容を想起させ, 解決や結果の見通しにつなげることができた。

イ 自分の考えを記述する算数的活動

自分の考えについて、「考え（図、式など）」、「答え」、「説明」を整理して記述するようにした。まず、解決の方法の見通しに沿って、図や式をかき、答えを出す。次に、図や式と関連付けながら自分の考えの説明を書く。また、「考えの順序が分かる書き方のキーワード」を載せ、自分の考えを筋道を立てて説明する記述を行うように促した。

資料9は、求める時間を□として道のりを求める式を立てて解決した児童の考えである。式変形を行い、□を求める式を作る順序を筋道を立てて記述することができた。また、資料10は、数直線を利用した児童の考えである。数直線を利用して数量の関係を把握し、時間を求める式を立てて考えた思考過程を記述することができた。

このことから、児童は、解決の見通しを基に、速さを求める式や道のりを求める式、時間と道のりの関係を表した数直線を利用し、□を使った式を立てて考えた思考過程を式や数直線などと関連付けて、言葉で説明を記述することができた。

ウ 自分の考えを説明し伝え合う算数的活動

隣の児童とペアを組み、自分の考えを説明する活動を行った。児童は、自力解決の際に記述した考えの「説明」を基にして説明を行うことができた。資料11 (p. 26) に示すペアによる説明と評価では、お互いの説明に高い評価を示しており、ペアの相手の説明が理解できたと考える。このことから、児童は、自力解決の際に記述した考えを基にして、「考え（図、式）」の部分と関連させながら、筋道を立てて説明することができたと考える。

全体での比較検討場面においては、電子黒板と実物投影機を利用して、発表

資料9 道のりを求める式を利用した考え

問題 時速80kmで走っているバスがあります。このバスが480km進むのにかかる時間を考え、説明しよう。

考え（図、式など）

| | |
|-----|-----|
| 道のり | 480 |
| 時間 | □ |
| 速さ | 80 |

$$\begin{aligned} \text{速さ} \times \text{時間} &= \text{道のり} \\ 80 \times \square &= 480 \\ \square &= 480 \div 80 \\ \square &= 6 \end{aligned}$$

答え 6時間

説明 言明します。答えは6時間になりました。理由をまず道のりを求める言葉の式を使いしました。道のりを求める式は速さ(80)×時間(□)＝道のり(480)になります。次に□を求める式を作ります。速さ(80)×時間(□)＝道のり(480)なので□を求める式は道のり(480)÷速さ(80)になります。道のり480÷速さ80＝6なので答えは6時間です。

考えの順序が分かるように説明を書こう。

答えは…

まず…

次に…

資料10 数直線を利用した考え

問題 時速80kmで走っているバスがあります。このバスが480km進むのにかかる時間を考え、説明しよう。

考え（図、式など）

| | |
|-----|--------|
| 道のり | 480 km |
| 時間 | □ |
| 速さ | 80 km |

① 時間＝道のり÷速さ
□＝480÷80
＝6

答え 6時間

説明 します。答えは、6時間になりました。私は数直線で考えました。数直線で考えると上の図のようになります。まず見ると、道のり480km、速さ80km 求める時間は、□時間になります。時間を表す公式は、道のり÷速さ＝時間です。次にこれを式に表します。そうすると式は480÷80＝6なので答えは、6時間です。これで発表をお終りにします。

考えの順序が分かるように説明を書こう。

答えは…

まず…

次に…

者の自力解決の際に記述した「考え（図、式）」を投影し、資料12に示した3つの説明を行った。検討場面においては、「共通している部分を見付ける」という観点から話し合いを行い、「時間＝道のり÷速さ」という共通点に気付き、まとめることができた。

(2) 学習評価を指導に生かす授業展開の工夫

ア 一人一人の解決方法に応じた評価活動

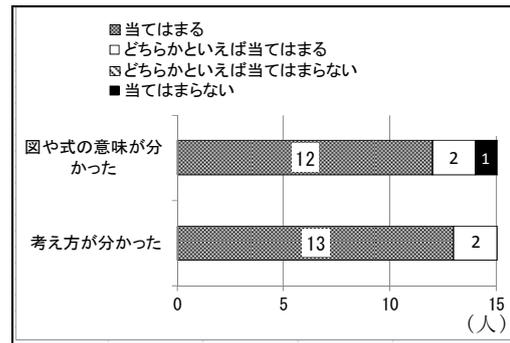
解決の方法や評価を記録できる「評価ボード」を活用して、指導と評価の一体化を図った。特に、「十分満足できる」状況と判断できる基準を「速さを求める式や道のりを求める式、時間と道のりの関係を表した数直線から時間を求める方法を考え、その方法を説明している。」として、自力解決における自分の考えを記述する部分において、資料13のように、「求める時間を□として、 $\square = 480 \div 80$ （時間を求める式）」と立式した記述を判断の基準とした。

自力解決場面においては一人一人の児童へ助言し、評価を行った。資料14から「十分満足できる（A）」を増やすことができたことが分かった。

イ 「おおむね満足できる」状況から「十分満足できる」状況にするための手立て

資料15は児童3の記述である。時速80kmは、「1時間で80km進む」という意味から、2時間では $80 \times 2 = 160$ で160km、3時間では $80 \times 3 = 240$ で240km、…、6時間では $80 \times 6 = 480$ で480kmと計算している記述が見られたため、「求める時間を□として道のりを求める式（ $80 \times \square = 480$ ）を立てること」を助言した。その後、資料15のように「 $80 \times \square = 480$ 、 $480 \div 80 = \square$ （時間を求める式）」と式の変形を記

資料11 ペアによる説明と評価



資料12 発表者の考え

- (ア) 速さを求める式から考える。
- (イ) 道のりを求める式から考える。
- (ウ) 数直線から考える。

資料13 評価規準を基にした評価

- (イ) 道のりを求める式から考える。
 $80 \times \square = 480$
 $\square = 480 \div 80$
 $= 6$ 答え 6時間

資料14 自力解決場面における評価

| 評価 | 助言前(人) | 助言後(人) |
|----|--------|--------|
| A | 11 | 14 |
| B | 3 | 1 |
| C | 1 | 0 |

資料15 児童3の記述

考え(図、式など)

道のり = 速さ × 時間

| | |
|-----|--------|
| 道のり | 480km |
| 時間 | □時間 |
| 速さ | 80km/時 |

$80 \times 2 = 160$
 $80 \times 3 = 240$
 $80 \times 4 = 320$
 $80 \times 5 = 400$
 $80 \times \textcircled{6} = 480$

$80 \times \square = 480$
 $480 \div 80 = \square = 6$

答え 6時間

述できた。

ウ 「努力を要する」状況から「十分満足できる」状況にするための手立て

解決の見通しがもてない児童4については、数直線をかいて考えることを助言した。その結果、資料16に示すように、単元を通じて利用してきた時間と道のりの数直線を記述し「求める時間を□として $\square = 480 \div 80$ （時間を求める式）」と立式することができた。また、児童4は練習問題においても数直線をかき、「時間＝道のり÷速さ」であることを確認し、解決することができた。

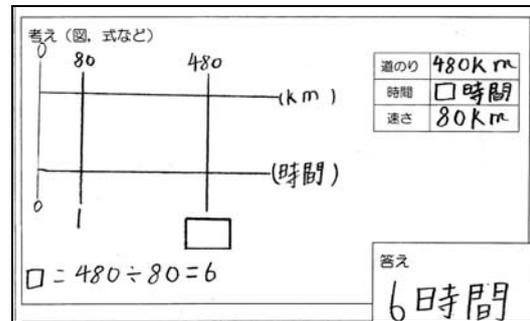
9 意識の変容

資料17、資料18より、どの項目においても「当てはまる」、「どちらかといえば当てはまる」と答えた児童数の増加が見られた。特に、資料17の「自分の考えを答えだけでなく図や言葉、式を使って書いている」という質問においては、「当てはまる」、「どちらかといえば当てはまる」と答えた児童数が14人となった。このことから、図や式を利用して考えを記述したり、図や式と関連させて言葉で説明を記述したりすることができるようになったと感じている児童が増えたことが分かる。

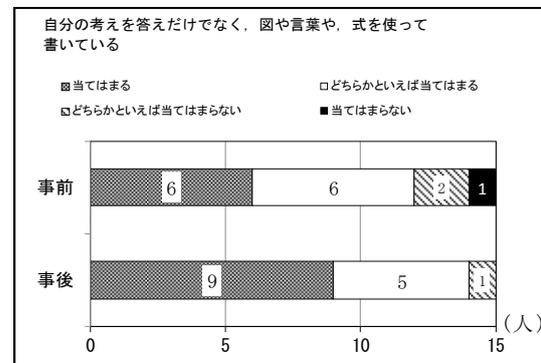
また、資料18の自分の考えを説明することに関する意識調査においても、自分の考えを順序よく説明したり、理由を入れながら説明したりすることができるようになったと感じている児童が増えたことが分かる。

これらのことから、筋道を立てて説明することができると感じている児童が増えたことが分かる。

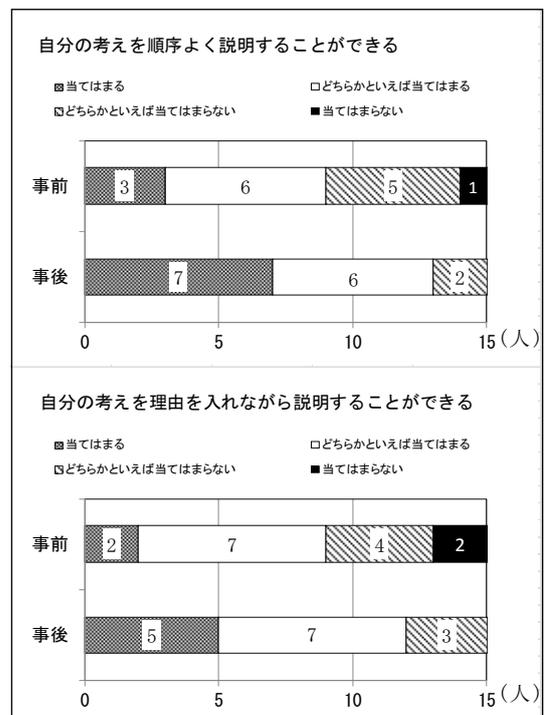
資料16 児童4の記述



資料17 自分の考えを記述する算数的活動における意識調査



資料18 自分の考えを説明することに関する意識調査



10 成果と課題

(1) 成果

ねらいを明確にした解決方法を考え説明する算数的活動と一人一人の解決方法に応じた評価活動を通して、「数学的な思考力・表現力を育む算数科学習指導と評価」の方法を追究してきた結果、次のようなことが明らかになった。

- ・ 学習課題の数値を十分に吟味し、現実的かつ比較しやすく計算しやすいものに数値を設定した。また、プレゼンテーションソフトで動画を用いて課題提示を行うことで、視覚的に課題を捉えられるようにした。既習の内容と本時の学習課題との関連を把握したことで、「公倍数で道のりや時間をそろえて比べる。」、「1秒間にそろえて、どれくらい走るか比べる。」などや□を使った式を立てて考えたり、「時間と道のりの関係を表した数直線」を利用する方法を考えたりするなど、既習事項を基にした解決方法を考えることができた。
- ・ 自力解決において、自分の考えを「考え（図、式など）」、「答え」、「説明」の部分に分けて整理して記述する算数的活動を取り入れたことで、「答えの理由が分かる書き方のキーワード」や「考えの順序が分かる書き方のキーワード」を利用し、自分の考えを図や式、表、□を使った式、数直線などに関連付けて、言葉で説明を記述することができた。また、自分の考えをペアや一斉において説明し伝え合う算数的活動を取り入れたことで、自力解決の際に記述した考えの「説明」を基にして、「考え（図、式）」の部分と関連させながら、根拠を明らかにして説明したり、筋道を立てて説明したりすることができるようになり、数学的な思考力・表現力を育むことができた。
- ・ 予想される児童の考えと評価規準を基に具体的な解決例を作成し、指導に当たったことで、考えの根拠の記述や「求める時間を□として、 $\square = 480 \div 80$ （時間を求める式）」と立式した記述が判断基準になり、本時の目標に迫るための指導と評価の一体化が図られた。

(2) 課題

- ・ 説明を振り返り、課題に応じた説明へと修正していく活動を工夫する。
- ・ 自分の考え方だけでなく、他者の考えや解決方法に着目して考える比較検討場面を工夫する。
- ・ 数学的な考え方を評価するための、より明確で妥当な評価規準の設定とそれを基にしたより具体的な手立てについて工夫する。

【授業研究 4】

中学校第2学年「連立方程式」における数学的な思考力・表現力を育む数学 科学習指導と評価

ー連立方程式を解く手順を説明する活動を通してー

1 単元名 連立方程式

2 単元の目標と観点別評価規準

連立二元一次方程式について理解し、それをを用いて考察することができるようにする。

| 数学への 関心・意欲・態度 | 数学的な見方や考え方 | 数学的な技能 | 数量や図形など についての知識・理解 |
|--|---|--------------------------------|----------------------------------|
| 連立二元一次方程式を活用することに関心を持ち問題の解決に生かそうとしている。 | 加減法や代入法で連立二元一次方程式を解く過程を振り返り、その共通点や相違点について考えることができる。 | 加減法や代入法を用いて連立二元一次方程式を解くことができる。 | 連立二元一次方程式の必要性と意味及びその解の意味を理解している。 |

3 単元の指導について

(1) 教材について

本単元は、中学校学習指導要領第2学年「A：数と式(2)」の「連立二元一次方程式について理解し、それをを用いて考察することができるようにする。」学習単元である。連立方程式の学習では、二つの文字の一方を消去し、既知の一元一次方程式に帰着させれば効率よく解くことができるという連立方程式のよさに気付くことが大切であると考え。連立方程式の解法である加減法と代入法はどちらも重要な解き方である。そこで、式の形に応じて使い分けることができるように根拠を明らかにしながら手順をまとめる活動を取り入れる。

さらに、連立方程式の利用においては様々な問題を取り入れることで、問題文から数量関係を捉える力を育みたい。

(2) 生徒の実態について（平成25年5月17日実施 調査人数27人）

本学級の「一次方程式」解の求め方に関する実態調査を行った。係数が整数だけの基本的な一次方程式を解く問題では、8割を超す生徒が正確に解くことができた。しかし、()の付いた一次方程式になると誤答か無答である生徒が半数程度になり、係数が小数や分数になると正答である生徒が半数を下回ってしまった。このことから一次方程式の基本的な解き方は理解しているが、係数や式の形に着目して解こうとすることができない生徒が多数いることが分かった。そこで、まとめの学習において連立方程式を解く手順を図や表、言葉などを用いて表し、「なぜその方法で解いたのか」という視点で、説明し伝え合う活動を取り入れる。

4 単元の指導計画（12時間扱い）

第1次 連立方程式 7時間

| 時 | 学習内容・活動 | 関 | 考 | 技 | 知 | 観点別評価規準 |
|--------|---------------------------------------|---|---|---|---|---|
| 1 | 条件不足の場面から，連立方程式の解の意味を考察する。 | | ◎ | | | 連立二元一次方程式を変数が満たすべき条件ととらえ，二つの条件が成り立つ変数の値の組を求める方法を考えることができる。 |
| 2 | 表を用いて，連立方程式の解を求める。 | | | | ◎ | 二つの二元一次方程式を成り立たせる値の組を調べ，連立方程式を解くことの意味を理解している。 |
| 3 | 連立方程式から y を含まない一元一次方程式を導くことで解を求める。 | | | ◎ | | 代入法の意味を理解し，代入法を使って連立方程式を解くことができる。 |
| 4 | 二つの方程式の一方の各辺から他方の各辺をひき，文字を消去して解を求める。 | | | ◎ | | 加減法の意味を理解し，加減法を使って連立方程式を解くことができる。 |
| 5 | どちらかの係数の絶対値をそろえ，文字を消去して解を求める。 | | | ◎ | | 連立方程式を x ， y の係数の絶対値を等しくして加減法を使って解くことができる。 |
| 6 | () を含む方程式や分数・小数を含む方程式など，複雑な連立方程式を解く。 | | | ◎ | | 複雑な連立方程式を解く手順を考え，解くことができる。 |
| 7 轉 | 数種類の連立方程式について解く手順を考え，その理由を説明する。 | | ◎ | | | 連立方程式の文字を消去するまでの手順について x と y の位置関係から加減法か代入法を選択し，説明することができる。 |

第2次 連立方程式の利用 5時間

5 本時の指導

(1) 目標

連立方程式を考察し，解く手順を図や表，言葉などを用いて表し，文字を消去するまでの手順について理由を説明することができる。

| |
|---|
| <p>【評価の視点】</p> <p>「おおむね満足できる」状況</p> <p>連立方程式の文字を消去するまでの手順について，x と y の位置関係から加減法か代入法を選択し，説明することができる。</p> <p>「十分満足できる」状況</p> <p>「係数の小数や分数を整数に直すこと」，「かっこをはずすこと」，「x と y の位置関係から加減法か代入法を選択すること」を含めて説明することができる。</p> |
|---|

(2) 主題に迫るために

ア ねらいを明確にした数学的活動の工夫

ワークシート上に連立方程式を解く手順を図や表，言葉などを用いて表し，そのシートを用いて「なぜその方法で解いたのか」という視点で，説明し伝え合う活動を取り入れる。

イ 学習評価を指導に生かす授業展開の工夫

自力解決やグループでの話し合い，全体での発表，比較検討を通して，2色のペンを活用しワークシートを作成していく中で，それぞれの学習過程における理解度について把握し，評価する。

(3) 準備・資料

掲示物（前時までに活用したもの）、ワークシート、赤ペン、青ペン、ホワイトボード、マーカーペン（黒・赤・青）、指し棒、マグネット

(4) 展開

| 学習活動・内容 | 指導上の留意点・評価 |
|--|---|
| <p>1 これまで学習してきた連立方程式を解く手順について振り返る。</p> <p>学習問題</p> | <p>・既習の連立方程式の解法について簡単に振り返ることで、式を考察し、適切な方法を見付ける必要性を確認する。</p> |
| <p>次の連立方程式を解くとき、1つの文字を消去するまでの手順を説明しなさい。</p> <p>(1) $\begin{cases} y = -x + 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ x + y = 2 \end{cases}$</p> <p>(4) $\begin{cases} 5(x + 2) + 7y = 1 \\ 10x - 3(y + 4) = 4 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 0.3x - 0.2y = 0.8 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 2y = -\frac{2}{3} \\ 4x - 9y = 22 \end{cases}$</p> | |
| <p>学習課題</p> <p>連立方程式を解く手順を図や表、言葉などを用いて表し、「なぜその方法で解いたのか」を説明しよう。</p> | <p>・(1)の問題を取り上げ、学級全体でxとyの位置に着目し、連立方程式を解く方法を選択できることを確認し、見通しをもたせる。</p> |
| <p>2 連立方程式を解く手順をワークシートに図や表、言葉などを用いて表す。</p> <p>3 解く手順をグループで説明し伝え合う。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・(1)～(6)の方程式を解く手順を伝え、「なぜその方法にしたのか」を説明する。 ・自分がかいたワークシートを用いて説明する。 ・話合いの中で質問や意見を交換し、説明を見直す。 ・ワークシートの修正または追加箇所を赤で記入する。 <p>4 他のグループの説明を聞き、考えを比較する。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ワークシートの修正または追加箇所を、青で記入する。 <p>5 本時のまとめをする。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・キーワードを基に、本時の学習で分かったことをまとめる。 <p>6 適用練習に取り組む。</p> | <p>・手順の表し方が分からない生徒のために、「式と計算」で活用した計算の手順を表したものを提示する。</p> <p>・話合いの内容が、方程式を解く方法だけになってしまうことがないように、「なぜその方法にしたのか」と生徒に質問させる。</p> <p>・自分の考えを説明するときは、図や表、式などを用いることで分かりやすくすることを助言する。</p> <p>㊦文字を消去するまでの手順について理由を説明することができる。 (ノートとワークシート記述の観察)</p> <p>・考えや方法の異なる代表者2～3人を指名して発表させる。</p> <p>・共通している点を、生徒の発言をつないで押さえる。</p> <p>・キーワードを「x = , y = の式」, 「係数」とし、板書する。</p> |

6 授業の実際

(1) ねらいを明確にした数学的活動の工夫

ア 学習課題の工夫と「説明シート」の活用

資料1の「説明シート」を使い、一通り連立方程式の解法を学習した後に、まとめの学習として連立方程式を解く手順を「なぜその方法で解いたのか」といった視点で説明する学習課題を設定した。

本時のねらいは、連立方程式を見たときに手順を考えることができるようにすることである。解を求めるのではなく、一つの文字を消去するまでの手順を理由を付けて書くように指示した。

生徒は、文字を消去しやすい解き方についてどのような理由で選んだのかを説明することで、代入法、加減法、小数や分数を整数にすることなどのよさについて考察したり確認したりすることができた。

資料2の生徒の説明では、 x を消去するまでの手順を、根拠を明確にしながら表現することができている。自力解決の時間において、自分だけの力で、(1)～(6)全ての連立方程式の文字を消去するまでの説明を記述することができた生徒は27人中13人であった。

イ グループで説明し伝え合う活動

生徒が作成した説明シートを用いて、自分の考えを3～4人のグループで伝え合う活動を行った。これまでは、ノートやホワイトボードに小さく長い文を書き、それを読むだけの説明をする生徒が多数見られた。しかし、本時の説明し伝え合う活動では、ほとんどの生徒が資料3

資料1 説明シート

連立方程式 説明シート

〇 次の連立方程式を解くとき、1つの文字を消去するまでの手順を説明しなさい。(計算しなくてよい)

| |
|---|
| (1) $\begin{cases} y = -x + 3 & \dots \textcircled{1} \\ 2x + y = 7 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$ |
| (2) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 & \dots \textcircled{1} \\ 2x + y = 5 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$ |
| (3) $\begin{cases} 3x + 5y = -2 & \dots \textcircled{1} \\ x + y = 2 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$ |
| (4) $\begin{cases} 5(x+2) + 7y = 1 & \dots \textcircled{1} \\ 10x - 3(y+4) = 4 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$ |
| (5) $\begin{cases} x + y = 6 & \dots \textcircled{1} \\ 0.3x - 0.2y = 0.8 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$ |
| (6) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 2y = -\frac{2}{3} & \dots \textcircled{1} \\ 4x - 9y = 22 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$ |

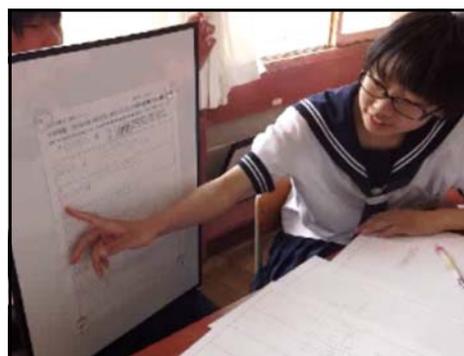
資料2 生徒の説明(加減法)

(3)

$$\begin{cases} 3x + 5y = -2 & \dots \textcircled{1} \\ x + y = 2 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

[1] 「 $y =$ 」という式がないので、加減法だと考える。
 [2] x の係数を同じにするため、 $\textcircled{2}$ の式を3倍する。
 [3] x を消去するため、 $\textcircled{1}$ の式から、3倍した $\textcircled{2}$ の式をひく。
 [総括] x が消去された

資料3 生徒が説明している様子



のように、根拠となる方程式の形や係数などを指し示しながら説明していた。また、自力解決では説明を全て記述することができていなかった生徒も、それらの説明を聞いたり、「どうしてそのような手順をするのか」といった質問をしたりすることで記述を加えることができた。その結果、文字を消去するまでの手順の説明を記述することができるようになった生徒は、自力解決後より5人増え、27人中18人になった。

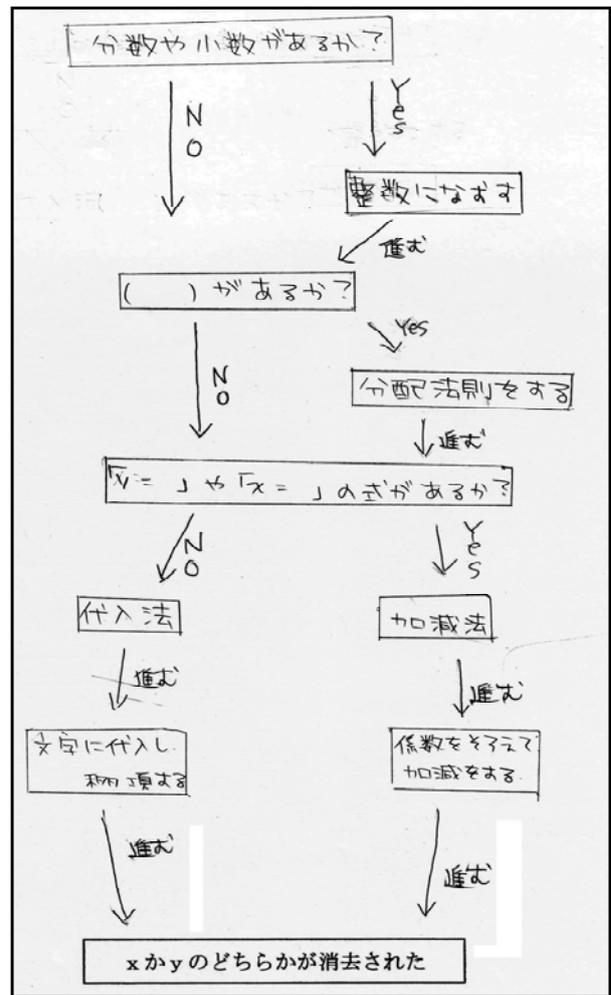
ウ 手順を図や言葉を用いてまとめる活動

式の形に応じて、加減法と代入法を使い分けることなどの解法過程を全体的に考察できるように、手順をまとめる活動を取り入れた。ここで、連立方程式を解いていく時は、「単に処理している時」と「判断している時」があることを全体で確認し、フローチャートに表すことができることを伝えた。

生徒は、説明シートで解法過程をもう一度見直し、「まず、係数の分数や小数をなくせばいいかな」、「いや、()を外す方が…」、「 $y =$ か $x =$ の式があるか」といった相談をグループでしながら、資料4のようなフローチャートを作成し、連立方程式を解く手順について、図や言葉を用いてまとめることができた。

以上のア～ウを通して、連立方程式を考察し、解く手順を図や表、言葉などを用いて表し、文字を消去するまでの手順について理由を説明することができるようになってきている。数学的な思考力・表現力を育むことができたと考える。

資料4 手順をまとめたフローチャート



(2) 学習評価を指導に生かす授業展開の工夫

ア フローチャートを活用した評価と指導

教師は、生徒がフローチャートを作成していくに当たって、「どこから書き始めてもよい」、「自分が理解している範囲でよい」ことをまず指示した。そして、教師は作成されたフローチャートの記述から個々の生徒の連立方程式を解くことに関する到達度を把握し、評価することができた。「分数や小数が係数にある場合は、整数に直す」、「()がある場合は、分配法則を使って()を外す」、「 $x = 〇$ 、 $y = 〇$ といった式がある場合は代入法で、ない場合は加減法で文字を消去する」の三つ全ての項目について自分の力で記述することができた「十分満足できる」状況にある生徒は、27人中15人であった。更にグループ内や全体での話し合いや比較検討を通じて、記述することができるようになった生徒は8人となり、全体で27人中23人であった。

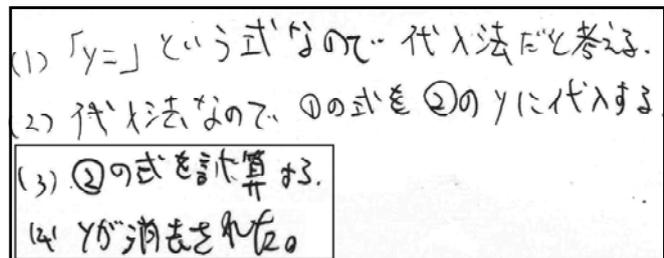
4人の生徒は、「分数や小数が係数にある場合は、整数に直す」及び「()がある場合は、分配法則を使って()を外す」の2項目に関して記述できなかった。記述できなかった生徒には、既習事項をまとめた説明プリントを配付し、次時の授業に向けて振り返りカード等を準備した。

イ 2色のペンを活用した生徒の記述を基にした評価

資料1の「説明シート」(p.32)や資料4(p.33)の「手順をまとめたフローチャート」を作成していく時に、グループの話合いや友だちに教えてもらって分かったことは「赤」で、学級全体の話合いや他のグループの発表で分かったことは「青」で書くことにした。資料5は、連立方程式(1)を解く手順の記述であるが、線で囲まれた部分は、赤で記述されていた部分を表している。

これによって、個々の生徒がどの段階で、どこまで理解したり、考えをまとめたりすることができていたのかを把握し、その場での指導に生かしたり、評価したりすることができた。

資料5 ペンを利用した生徒のシート



7 成果と課題

(1) 成果

代入法で解くことができなかった生徒も、「説明シート」を用いて説明し伝え合う活動を通して、連立方程式の解法過程をフローチャートで表し、解法を全体的に考察することができるようになり、数学的な思考力・表現力を育むことができたと考える。

また、自力解決やグループでの話合い、全体での発表、比較検討を通して、2色のペンを活用しワークシートを作成していく中で、教師は生徒のグループでの話合いやその中での個々の理解について把握し、評価することができた。さらに、説明する活動の中において、教師が明確な判定基準を設定し、ワークシートの記述を評価することで、「努力を要する」状況にある生徒を「おおむね満足できる」状況にするための手立てを計画的に準備しておくことができた。

(2) 課題

早い段階でフローチャートを完成させることができた生徒への手立てとして、文字を消去した後に、更にフローチャートを進めていくような助言をすべきであったと考える。今後は、「十分に満足できる」状況にある生徒への手立てをしっかりと準備しておきたい。

2色のペンを活用した記述による評価は有効であったが、生徒は「大切だと考えるところ」、「関連しているところ」などを表すときにも色を活用したいという意見が出た。生徒が自分の学習を振り返り、どの段階で理解できたかを把握でき、更に重要であると考えたことを加えて記述できる方法を考えていきたい。

【授業研究 5】

中学校第2学年「一次関数」における数学的な思考力・表現力を育む数学科 学習指導と評価

－表，式，グラフを関連付け，一次関数の特徴を説明する活動を通して－

1 単元名 一次関数

2 単元の目標と観点別評価規準

具体的な事象の中から二つの数量を取り出し，それらの変化や対応を調べることを通して，一次関数について理解するとともに，関数関係を見だし表現し考察することができる。

| 数学への 関心・意欲・態度 | 数学的な見方や考え方 | 数学的な技能 | 数量や図形などに ついての知識・理解 |
|--|--|--|--|
| 様々な事象を一次関数としてとらえたり，表，式，グラフなどで表したりするなど，数学的に考え表現することに関心をもち，意欲的に数学を問題の解決に活用して考えたり判断したりしようとしている。 | 一次関数についての基礎的・基本的な知識及び技能を活用しながら事象を数学的な推論の方法を用いて論理的に考察し表現したり，その過程を振り返って考えを深めたりするなど，数学的な見方や考え方を身に付けている。 | 一次関数の関係を，表，式，グラフを用いて的確に表現したり，数学的に処理したり，二元一次方程式を関数関係を表す式とみてグラフに表したりするなど，技能を身に付けている。 | 事象の中には一次関数としてとらえられるものがあることや一次関数の表，式，グラフの関連などを理解している。 |

3 単元の指導について

(1) 教材について

本単元は，中学校学習指導要領第2学年「C 関数(1)」の「具体的な事象の中から二つの数量を取り出し，それらの変化や対応を調べることを通して，一次関数について理解するとともに，関数関係を見だし表現し考察する能力を養う」ことをねらいとしている。第1学年では，関数関係にある二つの数量について，変化や対応の特徴を捉えるために，表，式，グラフを用いることを学習した。第2学年では，これらの学習の上に立って，一次関数の特徴を，表，式，グラフで捉えるとともに，それらを相互に関連付けることで，一次関数についての理解を深める。

(2) 生徒の実態について（平成25年9月10日実施 調査人数27人）

本学級の「量の変化と比例，反比例」に関する実態調査を行った。半数以上の生徒が比例や反比例の関係を表，式，グラフで表すことができた。その一方で数人の生徒は無答であり，関数関係について理解できていないことが分かった。また，異なる容器に水を入れるときの二つの数量の関係を表したグラフから容器を選択する問題では，変化や対応の様子を図とグラフなどを関連付けて説明できる生徒が少なかった。グラフや式について一通り学習した後に，それらの内容を振り返りながら，一次関数の表，式，グラフの関係を考察させる指導が必要であると考えられる。

4 単元の指導計画（17時間扱い）

第1次 一次関数 10時間

| 時 | 学習活動・活動 | 関 | 考 | 技 | 知 | 観点別評価規準 |
|-------------|--|---|---|---|---|---|
| 1 ・ 2 | 正方形を階段状に積んでいき、段数が変わると、それに伴って変化する数量を挙げる。さらにそれらの変化の様子を調べる。 | | ◎ | | | ・一次関数の特徴を理解し、式の意味を考察することができる。 |
| 3 ・ 4 | 容器に一定の割合で水を入れ、入れ始めてからx分後の水面の高さをy cmとし、yをxの式で表す。その式の各項がそれぞれ何を表しているのか説明する。 | | | | ◎ | ・一次関数のxの値に伴って、対応するyの値がどのように変化するかを理解している。 ・変化の割合の意味を知り、一次関数では、変化の割合は一定であることを理解している。 |
| 5 | $y = 2x + 5$ のグラフをかき、 $y = 2x$ のグラフとの関係を調べる。 | | | | ◎ | ・一次関数のグラフは直線になることを知り、一次関数と比例の関係を理解している。 ・切片の意味を理解している。 |
| 6 | $y = 2x + 5$ のグラフで、xの係数2の意味を考え、 $y = 2x + 3$ 、 $y = -2x + 5$ のグラフをかく。 | | | | ◎ | ・一次関数 $y = ax + b$ のグラフで、aの値がそのグラフの傾きを表すことを理解している。 |
| 7 | $y = 3x - 1$ のグラフを傾きと切片に着目してかき、 $y = x + 1$ のグラフをかく。 | | | ◎ | | ・一次関数のグラフを、傾きや切片を利用したり、グラフ上にある2点を利用してかくことができる。 |
| 8 | グラフから直線の式を求めたり、2点から一次関数の式を求める。 | | | ◎ | | ・グラフの傾き、切片に着目して、直線の式を求めることができる。 |
| 9 本時 | 一次関数の表、式、グラフの関係をまとめ、説明する。 | | ◎ | | | ・(変化の割合・傾き)と(切片)に着目し、表と式、式とグラフを関連付けて一次関数の特徴を説明することができる。 |
| 10 | 3点(1, 2), (4, 4), (12, 10)は一つの直線上にあるかを調べる。 | | ◎ | | | ・2点から直線の式を求めたり、変化の割合を求めたりすることができる。 |

第2次 方程式とグラフ 3時間

第3次 一次関数の利用 3時間

第4次 まとめ 1時間

5 本時の指導

(1) 目標

式の定数に着目し、表、式、グラフを関連付けて、一次関数の特徴を説明することができる。

| |
|--|
| <p>【評価の視点】</p> <p>「おおむね満足できる」状況 (変化の割合・傾き)と(切片)に着目し、表と式、式とグラフを関連付けて一次関数の特徴を説明することができる。</p> <p>「十分満足できる」状況 (変化の割合・傾き)と(切片)に着目し、表、式、グラフを相互に関連付けて一次関数の特徴を説明することができる。</p> |
|--|

(2) 主題に迫るための手立て

ア ねらいを明確にした数学的活動の工夫

式($y = 3x + 2$)から表とグラフをかき手順をワークシートに表し、式と表とグラフの関係をまとめていく過程で、「その手順を一次関数のどんな特徴から考えたのか」という視点で、説明し伝え合う活動を取り入れる。

イ 学習評価を指導に生かす授業展開の工夫

表やグラフをかく手順の中の「一次関数の特徴」について、表、式、グラフを関連付けて述べているかを評価する。ワークシート作成に2色のペンを活用することで個々の生徒がどの段階で書いた内容であるかを把握し、指導に生かすようにする。説明する活動においては、「おおむね満足できる」状況と「十分満足できる」状況に照らし合わせて評価し、個々の生徒に合わせて、変化の割合や傾きに注目させるなどの指導に生かすようにする。

(3) 準備・資料

掲示物（前時までに活用したもの）、ワークシート、赤ペン、青ペン、ホワイトボード、マーカーペン（黒・赤・青）、指し棒、マグネット

(4) 展開

| 学習活動・内容 | 指導上の留意点・評価 |
|---|--|
| 1 これまで学習してきた表やグラフをかく手順について振り返る。 | ・既習の一次関数の表やグラフについて簡単に振り返ることで、式を考察し、適当な方法を見つける必要性を確認する。 |
| 2 本時の問題を把握する。 | |
| 学習問題 | |
| 一次関数 $y = 3x + 2$ の式と表とグラフの関係をまとめよう。 | ・変化の割合と切片の数に着目し、表やグラフをかくことができることを確認し見通しをもたせる。 |
| 学習課題 | |
| 一次関数の表とグラフをかく手順を表し、「一次関数のどんな特徴からそう考えたのか」を説明しよう。 | ・手順の表し方が分からない生徒のために「連立方程式」で活用した解法の手順を表したものを提示する。 |
| 3 $y = 3x + 2$ の表とグラフをかく手順を表す。 | ・話合いの内容が、表やグラフをかく手順だけになってしまうことがないように、「なぜそのようにかくのか」と根拠を問うようにする。 |
| 4 表とグラフをかく手順についてグループで説明し伝え合う。 | ・自分の考えを説明するときには、表やグラフを用いることで分かりやすくなることを助言する。 |
| ・「一次関数のどんな特徴からそう考えたのか」を説明する。 | |
| ・手順の説明を基に式と表とグラフの関係をまとめる。 | ⑧式の定数に着目し、表、式、グラフを関連付けて、一次関数の特徴を説明することができる。 |
| ・ワークシートの修正または追加箇所を赤で記入する。 | (観察、発表、ワークシート) |
| 5 他のグループの説明を聞き、考えの共通点を検討する。 | ・考えや方法の異なる2～3のグループを指名する。 |
| ・ワークシートの修正または追加箇所を青で記入する。 | ・共通している点を、生徒の発言をつないで押さえる。 |
| 6 本時のまとめをする。 | ・キーワードを「変化の割合」、「切片」とし、板書する。 |
| ・キーワードを基に、本時の学習で分かったことをまとめる。 | |
| 7 適用練習に取り組む。 | |

6 授業の実際

(1) ねらいを明確にした数学的活動の工夫

ア 学習課題の工夫と「説明シート」の活用

本時では、生徒が表、式、グラフを相互に関連付けることができるように、資料1の「説明シート」を活用して、 $y = 3x + 2$ の表やグラフをかく手順を「一次関数のどんな特徴からそうかいたのか」といった視点で説明し伝え合う活動を取り入れた。

生徒は、これまでの学習において式から表やグラフをかく方法を理解してはいるが、相互に関連付けて理解しているとはいえない実態であった。そこで本時は、連立方程式の解法をまとめるときと同じように、生徒が表とグラフをかく手順を資料1「説明シート」に表した。それをを用いて、「一次関数のどんな特徴からそうかいたのか」を説明する活動を設定した。その結果、27人中12人の生徒は、自力解決の段階で表やグラフをかく手順だけでなく、「変化の割合がいつも一定である」ことを押さえた。表、式、グラフを相互に関連付けることができ、「十分満足できる」状況となった。

資料1 説明シート

一次関数 説明シート

課題 一次関数の表とグラフをかく手順を表し、「一次関数のどんな特徴からそうかいたのか」を説明しよう。

問題 一次関数 $y = 3x + 2$ の式と表とグラフの関係をまとめよう。

| | | |
|-----|-----|-----|
| x | ... | ... |
| y | ... | ... |

「説明シート」は、同じ一つの式から表とグラフを作成し、その表とグラフが左右に並ぶことで、表、式、グラフを視覚的に関連付けやすいものにした。自力解決の段階で、式からグラフをかくことが困難であった5人の生徒は、グラフをかく手順について「一次関数の特徴」をおさえてまとめ、それを基にもう一度グラフをかくことで、その後の適用練習でも自力でグラフをかくことができた。

イ グループで説明し伝え合う活動

式の定数に着目し、表、式、グラフを関連付けて一次関数の特徴を説明することができるように、3～4人のグループで説明シートを用いて伝え合う活動を行った。多くの生徒が、資料2のように式とグラフの両方を指し示しながら説明するなど、連立方程式のときに比べ、簡潔に分かりやすく説明することができた。

これらの活動の中で、生徒は分からないところを的確に質問したり、また、説明を聞いて「なるほど」とつぶやいたりできるようになった。更に、説明しながら表とグラフの関係に気付き、他の生徒と相談しながら考えを明確にすることができる生徒もいた。グループで説明し伝え合う活動を通して、表、式、グラフを相互に関連付ける「十分満足できる」状況にある生徒は27人中15人となった。

以上、アとイの活動を通して、数学的な思考力・表現力が育まれたと考える。

資料2 説明し伝え合う様子



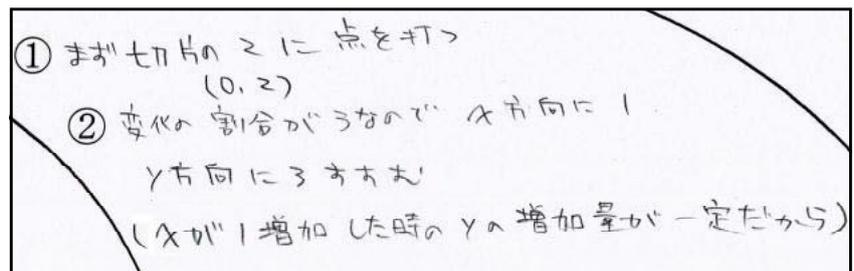
(2) 学習評価を指導に生かす授業展開の工夫

「数学的な見方や考え方」の評価については、問題を解決する過程を教師が明確に捉えることが大切であると考え。本時においては、生徒が一次関数の既習事項を振り返り、それらを関連付けて考えをまとめるまでの過程について、「説明シート」の記述を中心に評価した。資料3に示す生徒の記述について、グラフをかく手順をまとめていく過程で一次関数の特徴を押さえていることを評価することができた。

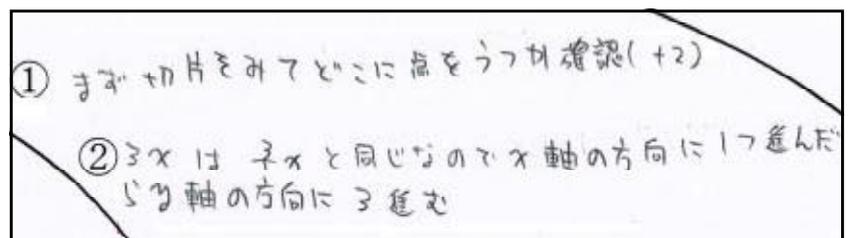
資料4は、一次関数の特徴を押さえていない生徒の記述である。この生徒に「どうしてこのようにかいてよいのか」と問いかけた。その結果、すぐに特徴を書き加えることができた生徒は2人、グループの仲間と相談して記述に加えることができた生徒は3人いた。

資料5 (p. 40) は表、式、グラフを「変化の割合」と「切片」について関連付けることができていた生徒の記述である。

資料3 一次関数の特徴を押さえている生徒の記述



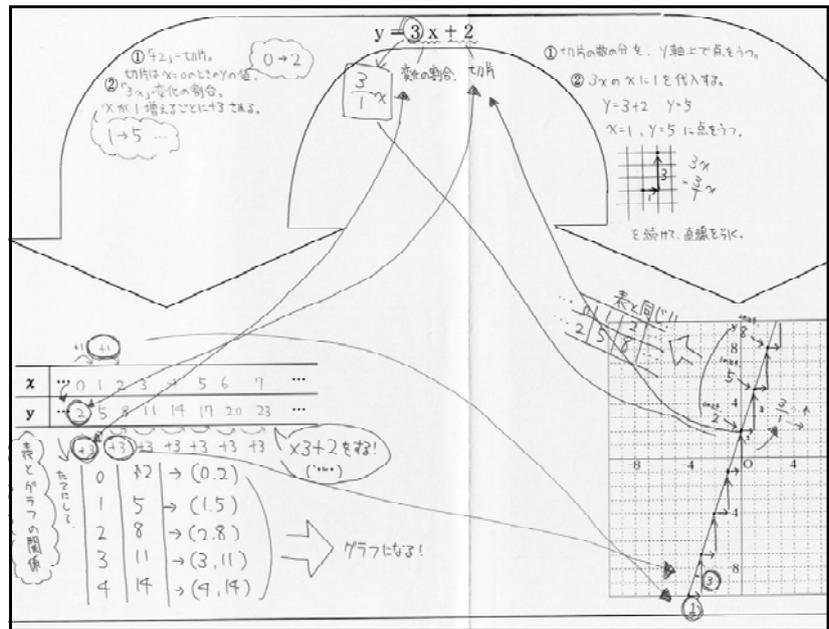
資料4 一次関数の特徴を押さえていない生徒の記述



この生徒は、同じグループの中の関連付けができていない友人に助言したり、ヒントを出したりする様子が見られた。

関連付けする際には、「赤」と「青」で色分けして書き込みをしているため、どの段階で関連付けを行ったかについて教師側が把握し、指導に生かすことができた。

資料5 表、式、グラフを関連付けた生徒の記述



7 成果と課題

(1) 成果

式からグラフと表をかく手順を「説明シート」に表し、「一次関数のどんな特徴からその手順を考えたのか」を説明し伝え合うことによって、生徒は一次関数の表、式、グラフを関連付けることができるようになり、数学的な思考力・表現力を育むことができた。

表やグラフをかく手順の中に「一次関数の特徴」が記述されているかどうかを、授業中の机間指導で評価し、指導に生かすことができた。また、教師が、表とグラフの関連を記述することができていないグループへの助言を計画的に行うことで、「おおむね満足できる」状況から「十分満足できる」状況になった生徒がいた。判定基準を明確にした指導は、数学的な思考力・表現力を育むために有効であると考えられる。

(2) 課題

本単元の学習では、生徒はこれまで以上に主体的に思考し、表現することができていたので、今後の学習においても評価規準を基に判定基準を明確にした教材を作成していきたいと考える。また、それまでの個々の生徒の評価を、本時の授業の計画や教師の指導に有効に生かせるような取組を継続していきたい。あらゆる単元においてそれまで学習したことをまとめる活動は有効であるが、時間を要する。そこで生徒に押さえたい内容を焦点化して学習課題を設定することができるように、それまでの学習の評価を生かしていきたい。

【授業研究 6】

高等学校第3学年数学Ⅲ「三角関数と極限」における数学的な思考力・表現力を育む数学科学学習指導と評価
－極限値の性質を活用して円の面積の公式を導出するための説明し伝え合う活動を通して－

1 単元名 三角関数と極限

2 単元の目標と観点別評価規準

微分法，積分法の基礎としての極限の概念を理解し，それを関数値の極限の考察に活用することができる。

| 数学への関心・意欲・態度 | 数学的な見方や考え方 | 数学的な技能 | 数量や図形などについての知識・理解 |
|--|--|---|--|
| 三角関数が現れる図形的な問題を，三角関数の極限の性質を利用して考察しようとする。 | 事象を数学的に考察したり表現したり，発展的に考えたりすることを通して，極限における数学的な見方や考え方を身に付けている。 | 三角関数の極限について考察することができる。三角関数の極限を応用して，図形的な問題を処理することができる。 | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を利用した，三角関数を含む関数の極限値の求め方について理解している。 |

3 単元の指導について

(1) 教材について

この単元までに，数列の極限，無限等比級数及び無限級数を学んできた。この単元では既習事項を踏まえ，三角関数の極限を学ぶ。円の面積や円周を，微小図形の和の極限で求める活動は，数学的な思考力や表現力を育む上で重要であると考える。

(2) 生徒の実態について（平成25年6月22日実施，調査人数25人）

本校の理系161人のうち97人が数学Ⅲ・Cを履修している。公式を暗記し，道具として使うことだけに終始してしまい，問題の意味を思考したり表現したりすることに苦手意識を持つ生徒が多い。表1（p.42）に示す意識調査では，初めて見た問題へのアプローチの仕方は「よく考える」と「少し考える」と答えた生徒がほとんどであった。しかし解く自信については，「あまり自信がない」と「自信がない」を選んだ生徒が大半であった。また「既習事項を使えますか」という質問には，半数の生徒が使えないという結果になった。

そこで，三角関数の極限という既習事項を活用し，じっくり考え，考えた過程を表現するという一連の過程を通して，問題の解決を図ることができるという経験をさせ，数学的な思考力・表現力を育みたいと考える。

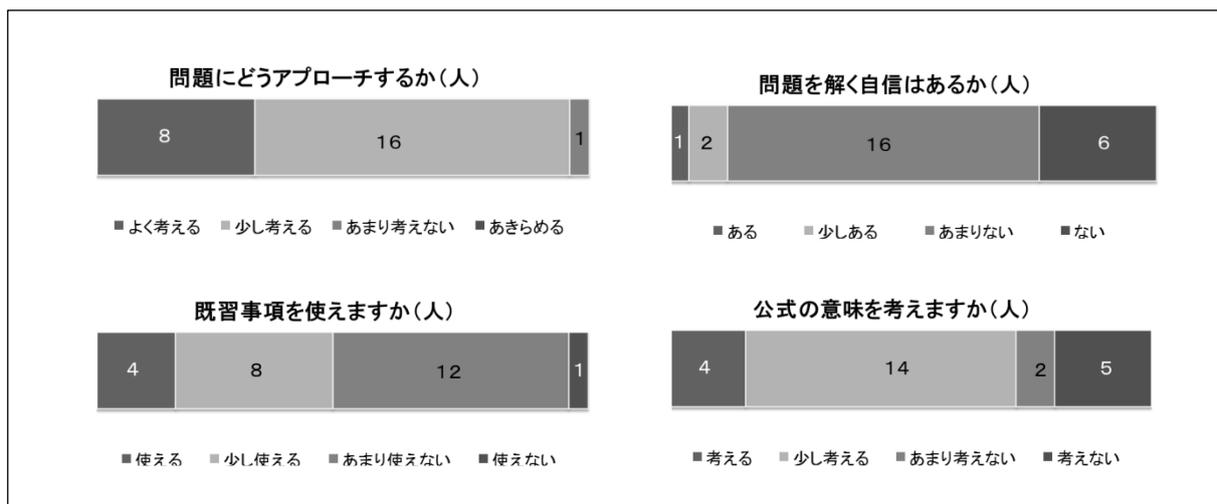


図 1 意識調査の結果（事前）（平成 25 年 6 月 22 日実施，調査人数 25 人）

4 単元の指導計画（4 時間扱い）

- 第 1 次 三角関数の極限 1 時間
 第 2 次 $\frac{\sin x}{x}$ の極限 2 時間

| 時 | 学習内容・活動 | 関 | 考 | 技 | 知 | 観点別評価規準 |
|---------|---------------------------|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{\sin x}{x}$ の極限(1) | | | | ◎ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を利用して，三角関数を含む関数の極限值が求められることができる。 【知】 |
| 2 本時 | $\frac{\sin x}{x}$ の極限(2) | | ◎ | | | 極限值を求めるだけでなく， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を活用し，事象を数学的に考察，表現したり，発展的に考えたりすることを通して，円の面積，円周が求められることができる。【考】 |

- 第 3 次 三角関数の極限の応用 1 時間

5 本時の指導

(1) 目標

- ・ 三角形の和を利用し，極限值を考えることで，円の面積や円周を求めることができる。
- ・ $\frac{\sin x}{x}$ の極限を利用して，三角関数を含む関数の極限值が求められることができる。

【評価の視点】

「おおむね満足できる」状況

円の面積を三角形の面積の和で考えることができ，正多角形として立式することができる。また極限值を考えることで，円の面積の公式を導くことができる。

「十分満足できる」状況

既習事項から，円周を導くことができる。

(2) 主題に迫るための手立て

扇形の数を ∞ にしていくことで、長方形 \rightleftharpoons 円になることをイメージできるようにする。またワークシートを活用し、順を追って考えられるようにする。グループで伝え合い説明する活動を通して、円の面積を正多角形の面積で考え、極限値を求めることで公式を導けるようになることを考える。具体的な助言として、「正方形と正六角形で近似したときの、立式を考えてみよう。」や「 $n \rightarrow \infty$ を $\theta \rightarrow 0$ と置き換える。」などが考えられる。

(3) 準備・資料

教科書（数研出版 改訂版 数学Ⅲ），ワークシート，パソコン

(4) 展開

| 学習活動・内容 | 指導上の留意点・評価 |
|--|--|
| <p>1 既習事項，円の面積の公式の導き方を確認する</p> <p>(1) 円を扇形に分け，並び替えることで，平行四辺形に近似する方法を復習する。</p> <p>(2) 扇形の数を増やすことで，より長方形になることを確認する。</p> <p>2 円の面積の公式を極限で導く。</p> <p>(1) ワークシートを使い個人で考える。</p> <p>ア 円を正方形で近似し，面積の誤差を読み取る。</p> <p>イ 同様に正六角形で近似し，正方形のときの誤差と比べる。</p> <p>(2) グループ活動で説明し伝え合う。</p> <p>ア 意見を出し合い正 n 角形の面積を立式し，円に近付けるために極限値を求める。</p> <p>イ 求めた解法をお互いに伝え合い，自分の考えと他人の考えを比較し，アプローチの方法を理解する。</p> <p>3 正 n 角形の周の長さを考え，極限を求めることで，円周の公式を導く。</p> | <ul style="list-style-type: none"> ・ 円の面積の公式 πr^2 の考え方を確認する。 ・ 扇形の枚数を増やすことで，並び替えた扇形の弧が直線に近づくことを確認する。 ・ 円の大きさと正方形の大きさを比べる。 ・ 三角形の個数を増やすことで，誤差が小さくなることを再認識させる。 ・ 正 n 角形の一般式を考える際，つまりく生徒には，正方形(四角形)・正六角形を求めた過程を促す。 ・ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を復習させる。 ・ 個人で考えた後，グループで考える。 ・ グループになってから記入した式や考えは，色ペンで記入させる。 ㊦ 正 n 角形の面積を立式し，面積の公式を導き出すことができる。 (発問，ワークシート，机間指導) 【数学的な見方や考え方】 ㊦ 正 n 角形の周の長さの極限値を考えることで円周の公式を導くことができる。 (ワークシート，机間指導) 【数学的な見方や考え方】 ・ ワークシートを振り返り，本時の目標 |

| | |
|--|---|
| <p>4 まとめ</p> <p>(1) 本時の目標を達成できたか考える。</p> <p>(2) 次時の学習の確認をする。</p> | <p>を達成できたか自己評価する。</p> <ul style="list-style-type: none"> 教科書の例題を、考えてくるように指導する。 |
|--|---|

6 授業の実際

(1) ねらいを明確にした数学的活動の工夫

ア 思考の手助けとなるワークシートの工夫について

円に内接する正 n 角形の面積の極限から円の面積の公式を導出する過程で、順序よく考えることによって問題の解決につながることを実感できることをねらいとする。ワークシートを工夫するとともに、グループ内で説明し伝え合う活動を取り入れる。

ワークシートは、円を正方形の面積、正六角形の面積と段階的に考えていくことができるように留意して作成した。資料1はワークシート使用前の生徒の解答、資料2 (p. 45) はワークシート中での解答である。ワークシートを使う前の解答を見ると、考えようとするが糸口が見つからない、白紙、既習事項を使おうとしているがうまくいかないなど、解決方法を見いだすことに苦労しているのが分かる。一方、資料3では、段階的に考え、既習事項を確認しながら解答することができた。

資料1 ワークシート使用前の解答 (2人) (平成25年6月22日実施 第3年次)

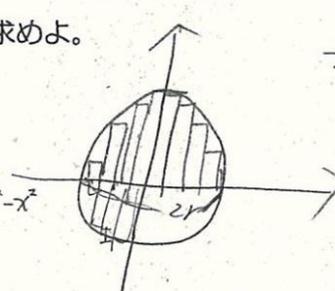
8. 極限を利用して、円の面積の公式を求めよ。

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$-2ax + y^2 = r^2 - a^2 - b^2 - x^2$$

$$4 \left\{ \frac{r}{n} \right\} \left(\sqrt{r^2 - \frac{2r}{n}} + \sqrt{r^2 - \frac{r}{n}} \right)$$



$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y = (r+x)(r-x)$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - \frac{2r}{n}}$$

8. 極限を利用して、円の面積の公式を求めよ。

円に内接する、(円の方程式は $x^2 + y^2 = r^2$)

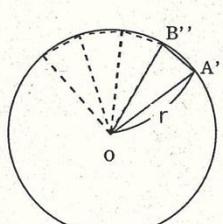
この数が n の多角形、 $\frac{1}{2} \times r^2 \times \sin \frac{360}{n} \times n$

の面積は、 \rightarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{360}{n} =$$

資料2 ワークシート中の解答（2人）

ステップII 円の面積の公式を、極限を使って求めよう。

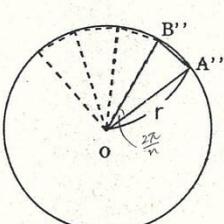


$$\frac{1}{n} S = \frac{1}{2} \times r \times r \times \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$S = \frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

円の面積 = $\lim_{h \rightarrow \infty} S_n = \lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} h r^2 \times \sin \frac{2\pi}{h} \right\}$
 $\frac{2\pi}{h} = \theta$ とおき $n = \frac{2\pi}{\theta}$
 $h \rightarrow \infty \therefore \theta \rightarrow 0$
 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\theta} \times r^2 \times \sin \theta \right\} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \pi r^2 \times \frac{\sin \theta}{\theta} \right\} = \pi r^2$

ステップII 円の面積の公式を、極限を使って求めよう。



$$S = \left(\frac{1}{2} \times r \times r \times \sin \frac{2\pi}{n} \right) \times n$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} n r^2 \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$
 $= \pi r^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$
 $\frac{2\pi}{n} = \theta$ とおき $n \rightarrow \infty$ とおき $\theta \rightarrow 0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pi r^2 \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \pi r^2$

イ グループによる説明し伝え合う活動

個人でじっくり考えた後にグループ活動をしたので、自分がどこでつまづいているのかを各自が分かっている、糸口が見つかった生徒からつまづいている生徒へ分かりやすい説明ができた。各々が意見を言う中で、立式した根拠や考え方、解答への糸口をグループ内でまとめた。ワークシートにおいて、正方形⇒正六角形を考えたことから、「数列で一般項にも使えるのではないか。」の声や、

「 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ をこんなところで使うのか。」などの驚きの声も上がっていた。

正方形⇒正六角形を考え、正n角形の面積を立式する考え方が、異なる問題へのアプローチの糸口になり、考える過程の中で既習済みの公式を再認識できた。

(2) 学習評価を指導に生かす授業展開の工夫

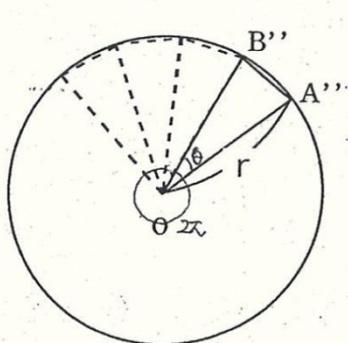
ア 評価について

今回の授業では、「正n角形の面積を立式し、面積の公式を導き出すことができる」及び「正n角形の周の長さの極限值を考えることで円周の公式を導くことができる」の2つを目標とした。そこで、それぞれの公式を導くための考え方を記述したワークシートを基に評価する方法を工夫した。具体的には、グループ活動で書き加えた内容は赤字で記入するように指導し、自力解決できた部分と区別した。色分けによって、生徒がつまづいたポイントが把握でき、達成度を確認するために有効だった。資料3 (p.46) は、グループ活動後のワークシートである。四角で囲んだ部分を実際には赤字でかかれた部分であり、理由を明確にしなが、結論に至る流れが記述されている。

また、本時で学んだ極限の考え方を活用し、事後調査として円周の長さを求める発展問題を実施することにより、段階的に考えることが身に付いたかどうかを検証したところ、円周の長さを求める場合にも、極限の考え方を活用して段階的に公式を導くことができた。

資料3 色分けされた解答（囲みが赤で書かれた解答）

ステップⅡ 円の面積の公式を、極限を使って求めよう。



$$\left(\frac{r}{2} \cdot r \cdot \sin \frac{2\pi}{n}\right) \cdot n$$

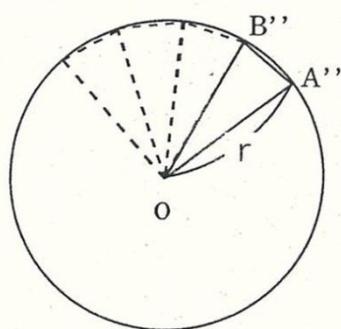
$$\left(\frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin \theta\right) \cdot n$$

$$\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{n}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin \frac{2\pi}{n}\right) \cdot n$$

$$= \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

ステップⅡ 円の面積の公式を、極限を使って求めよう。



$$n \times \frac{1}{2} \times r \times r \times \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$\frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{2\pi}{n} \quad \left(2\pi \text{ と } n \text{ 個で割った} \right)$$

イ 自力解決場面における指導と評価の一体化

評価の視点の「おおむね満足できる」評価に到達していない生徒の改善を図るために、思考の手助けとなるワークシートを活用し、次の(ア)、(イ)、(ウ)のように個別指導し、生徒を導いた。

(ア) 正n角形の面積が立式できない生徒に対して、ワークシートの手順の第1段階として、正方形と正六角形との比較によって考えるように準備した。

本時では、正n角形の立式ができなかった生徒に個別指導し、四角形と正六角形の4と6の数字をnに置き換えることによって立式できた。

(イ) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{2\pi}{n}$ の値を求められない生徒に対して、極限の公式「 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 」を

ワークシート上に「ポイント」として準備した。

本時では、極限值を求められなかった生徒が、nをxに置き換えることによって極限值を計算することができた。

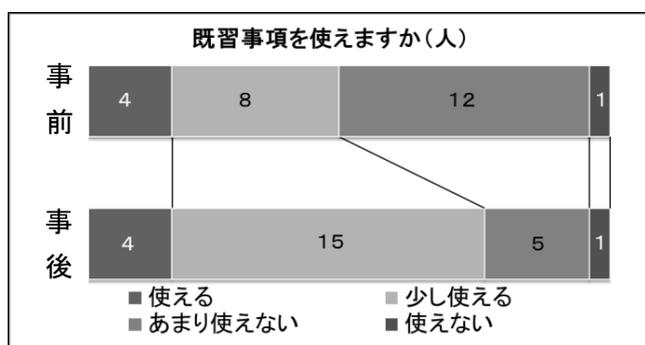
(ウ) $n \rightarrow \infty$ と公式の $x \rightarrow 0$ が結びつかない生徒に対しては、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ の極限と、

$\lim_{x \rightarrow 0} x$ の極限を個別に指導することにした。

本時では、 $n \rightarrow \infty$ と公式の $x \rightarrow 0$ が結び付き、極限值を求め、円の面積の公式を導き出すことができた。

(3) 意識調査・実態調査から

図2は、授業前後の意識調査の結果をまとめたものである。「既習事項を使えますか」の項目は、「少し使える」と答えた生徒が事前調査に比べ増加した。これは、公式だった $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を数学的活動を通して実際に使ってみたことや、極限值を求める問題で $\frac{2\pi}{n} = \theta$ と置き換えることが、 $n \rightarrow \infty$ から $\theta \rightarrow 0$ になることを、数式だけでなく正多角形からもイメージできたためだと考える。



【感想】

- ・円の面積を導く過程で、習ったことを使ったので、もう忘れないと思う。
- ・置き換えの意味が計算の中でなく、図の中で感じる事ができた。
- ・初めての問題でも、糸口を考えることで解くことができた。

図2 意識調査の結果（事前・事後の比較）と感想

（事前：平成25年6月22日実施25人，事後・感想：平成25年7月3日実施25人）

また授業の最後に、「円周 $2\pi r$ を導け」という問題で実態調査を実施したところ、図3のように、正答者が増加している。また、到達目標に達していない生徒でも、途中までは何らかの記述が見られた。このことから、円の面積の公式を段階的に導いたことにより、同様の考え方を円周の公式を導く際に活用できたことが分かる。

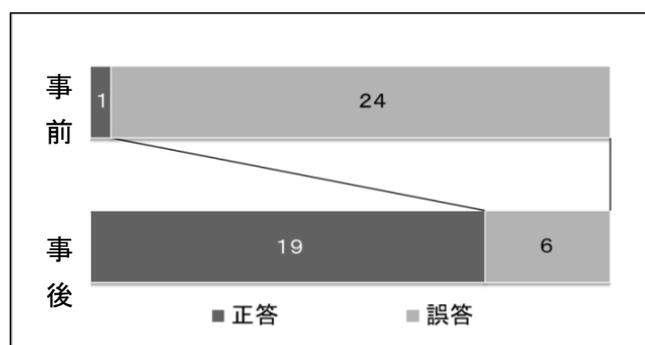


図3 実態調査の解答状況（事前・事後の比較）

（事前：平成25年6月22日実施25人，事後：平成25年7月2日実施25人）

7 成果と課題

(1) 成果

- ・ ワークシートを使ったことで、順序立てて問題を考えることができた。また、課題設定を工夫したことで、公式の意味について深く考えることができた。
- ・ 立式し計算していく過程で、公式を使う必要性を感じることもできた。また、極限值を求めるための工夫をしたことにより、問題を単に計算問題としてではなく、図形的・視覚的に理解することができた。また、事象を数学的に考察、表現し、発展的に考えることができた。
- ・ グループごとに考察し更に分かりやすい表現方法や解答方法を知り、自分のワークシートに記入することによって数学的な表現力も高めることができた。

(2) 課題

- ・ 他の分野でも、生徒が段階的に考察できるよう、ワークシートの工夫を続けていきたい。
- ・ 他の分野でも説明し伝え合う活動を取り入れ、思考力・表現力を育てていきたい。

【授業研究 7】

高等学校第3学年数学C「極座標と極方程式」における数学的な思考力・表現力を育む数学科学習指導と評価
 ー極方程式のグラフをかくための糸口を考える操作的活動を通してー

1 単元名 極座標と極方程式

2 単元の目標と観点別評価規準

二次曲線の基本的な性質及び曲線がいろいろな式で表現できることを理解し、具体的な事象の考察に活用することができる。

| 数学への関心・意欲・態度 | 数学的な見方や考え方 | 数学的な技能 | 数量や図形などについての知識・理解 |
|---|--|--|--|
| 平面上の点を表す様々な座標系があることに興味・関心を持つ。 直交座標と極座標の関係に興味・関心を持ち、積極的に相互の関係を考察しようとする。 | 極座標で表された点の直交座標を求めることができる。直交座標で表された点の極座標を求めることができる。 | 円や直線を極方程式で表すことができる。直交座標で表された方程式を極方程式で表すことができる。 | 極方程式で表された方程式と直交座標における方程式の関係について理解し、基礎的な知識を身に付けている。 |

3 単元の指導について

(1) 教材について

これまでに様々な二次曲線を学習し、曲線の表示に関しても、 x と y の関係式や媒介変数を使った表示を学んできた。この単元では既習事項を活用し、複雑な媒介変数表示と極座標を学ぶ。極座標を実際にプロットし、 xy 平面の方程式から極方程式に慣れるための活動は、数学的な思考力や表現力を育む上で重要であると考えられる。

(2) 生徒の実態について（平成 25 年 9 月 12 日実施，調査人数 24 人）

極座標を学ぶ上で、三角関数に習熟していることが必要である。図 1（p. 50）に示す意識調査では、三角関数が少し苦手・苦手と答えた生徒が、24人中16人という結果だった。また、文字を消去する計算に関しては、20人が少し苦手・苦手と回答した。

また、資料 1（p. 50）の実態調査を実施したところ、問 1 は比で答える生徒がほとんどで、三角比の性質を考えた $x = r \cos \theta$ で考える生徒は少なかった。問 2 は代入で試みるが行き詰まってしまい、正解につながるような柔軟な解答は見られなかった。

れなかった。

そこで極座標，極方程式を考える上で，極方眼紙にかき込む活動や，グラフの形を確認する活動を通して，思考し表現する力が身に付くと考える。



図 1 意識調査の結果（事前）

資料 1 実態調査の問題（事前）

| | |
|----------------------|--|
| <p>問 1 空欄を埋めなさい。</p> | <p>問 2</p> <p>r, θ を消去し, x, y の関係式をつくりなさい。</p> $r = 2(\cos \theta + \sin \theta)$ $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ |
|----------------------|--|

4 単元の指導計画（3時間扱い）

第 1 次 極座標と極方程式 1 時間

| 学習内容・活動 | 関 | 考 | 技 | 知 | 観点別評価規準 |
|------------------|---|---|---|---|--|
| 極座標と極方程式 (本時) | | ◎ | | | 極座標で表された点の直交座標を求めることができる。直交座標で表された点の極座標を求めることができる。また，極方程式の意味を理解し，グラフをかくことができる。 |

第 2 次 xy の方程式と極方程式 1 時間

第 3 次 2 次曲線の極方程式 1 時間

5 本時の指導

(1) 目標

- ・直交座標と極座標の関係を考察し，極座標で表された点の直交座標を求めることができる。
- ・極方程式のグラフをかくことができる。

【評価の視点】

「おおむね満足できる」状況

極座標から直交座標へ，直交座標から極座標への変換ができる。

「十分満足できる」状況

極方程式のグラフがかけ， r が負の値でも対応できる。

(2) 主題に迫るための手立て

直交座標から極座標へスムーズに入れるよう，視覚的に訴えるようにする。さらに極方眼紙にプロットし，コルクボードには画鋏を使って極方程式を表現する。操作的活動を実施することによって，極座標と直交座標相互の変換の方法や，極方程式を書くときの糸口を考えられるようになると考える。極座標に戸惑う生徒に対して，「導入のメジャーの動きを，長さで角度で考えよう。」や「 $x = r \cos \theta$ と $y = r \sin \theta$ を思い出そう。」と助言し主題に迫る。

(3) 準備・資料

教科書（数研出版 新編 数学 C），極方眼用紙，コルクボード，メジャー

(4) 展開

| 学習活動・内容 | 指導上の留意点・評価 |
|--|--|
| <p>1 $x y$ 座標を復習し，極座標を導入する。</p> <p>(1) 既習事項である xy 平面での座標の確認をする。</p> <p>(2) 極座標での表し方を考える。極(0)から延びる r の長さで始線からの角度(偏角)で位置が決まることを考える。</p> <p>(3) $x y$ 座標と極座標の関係を考える。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2}$</p> | <ul style="list-style-type: none"> • $x y$ 平面での位置特定は，水平方向と鉛直方向で座標を表していたことを確認する。 • 今までの学習では，$x y$ 平面での座標の捉え方が多いため，r と偏角で位置を特定するイメージが浮かびにくい。そこで，メジャーを使って視覚的に感じられるようにする。 • x, y 成分が暗記だけの式になっていないか確認し，再度イメージできるようにする。 |
| <p>2 極座標，直交座標を体感する</p> <p>(1) 極方眼紙を使って，極座標をプロットする。</p> <p>(2) 書いた極座標から，直交座標を求める。</p> <p>(3) 直交座標から極座標を考える。(グループ)</p> | <ul style="list-style-type: none"> • r の長さで偏角の関係で位置が決まることを強調する。 • 公式で求めるのではなく，図からのイメージを大切にす。 ⑧ 極座標から直交座標を求めることができる。(発問，極方眼紙，机間指導) • コルクボードを使い極座標を考えさせる。 |

| | |
|--|---|
| <p>3 極方程式からグラフをかく。</p> <p>(1) 極方程式の存在を伝え、表を使いグラフを書く。</p> $r = \frac{1}{\sin \theta}$ <p>(2) かけたグラフを発表する。</p> <p>4 本時のまとめをする。</p> <p>(1) 確認テストをする。</p> $r = \frac{1}{\cos \theta}$ <p>(2) 次時の学習を確認する。</p> | <ul style="list-style-type: none"> ・ 計算だけで答えを求めないように促す。 ⑧ 直交座標から極座標を求めることができる。 (発問, ワークシート, 机間指導) 【数学的な見方や考え方】 ・ 表を作りグラフを書くように指示する。 ・ 表を作り, コルクボードを使って概形を考えるように指示する。 ・ r が負の場合の処理の仕方を考えさせる。 ⑨ r が負の場合, π 位相することが理解でき, グラフがかける。(確認テスト) 【数学的な見方や考え方】 ・ 次回は, 計算で極方程式を考えること(教科書の例題 P74 例 6)を通知する。 |
|--|---|

6 授業の実際

(1) ねらいを明確にした数学的活動の工夫

ア メジャーを用いた導入で極座標を視覚的に捉える工夫

これまで一般的だった x y 平面での考え方から, 極座標の考え方を印象付けるために, メジャー本体と先端に磁石を取り付け, 黒板に固定できるようにした。資料 2 のように, 引き出す長さで動径を表せるようにしたことによって, 長さや方向 (角度) で位置を決められることを伝えられた。

また, 図 2 の生徒の意識調査でも, メジャーを用いた導入によって, 極座標の考え方が印象に残ったことが分かる。

資料 2 メジャーを用いた導入

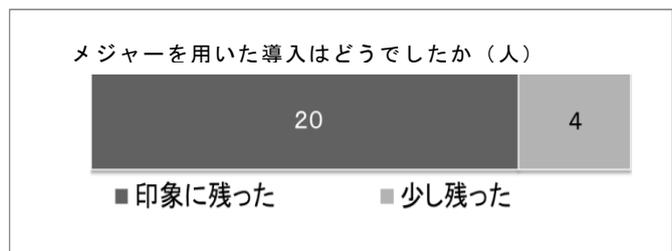
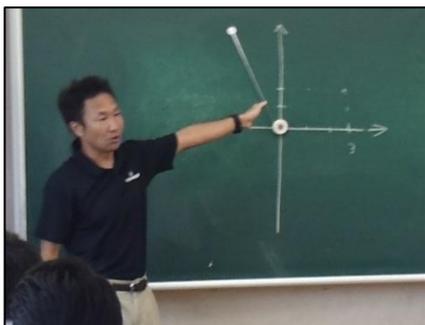


図 2 導入の意識調査 (事後)

(平成 25 年 10 月 4 日実施, 調査人数 24 人)

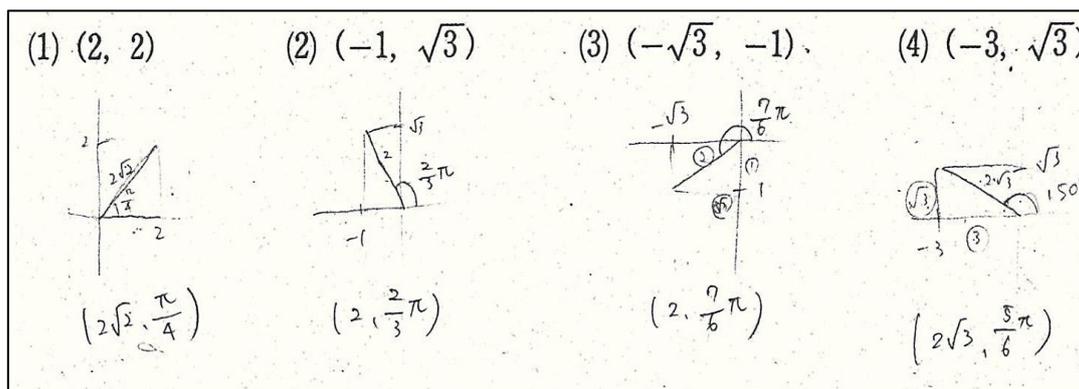
イ 2通りの方法で極座標を求める活動

x y 座標で表された座標を、極座標で表す問題に対して、極方眼紙を用いてイメージによって解答する方法と公式を利用する方法の2通りの方法を紹介した。

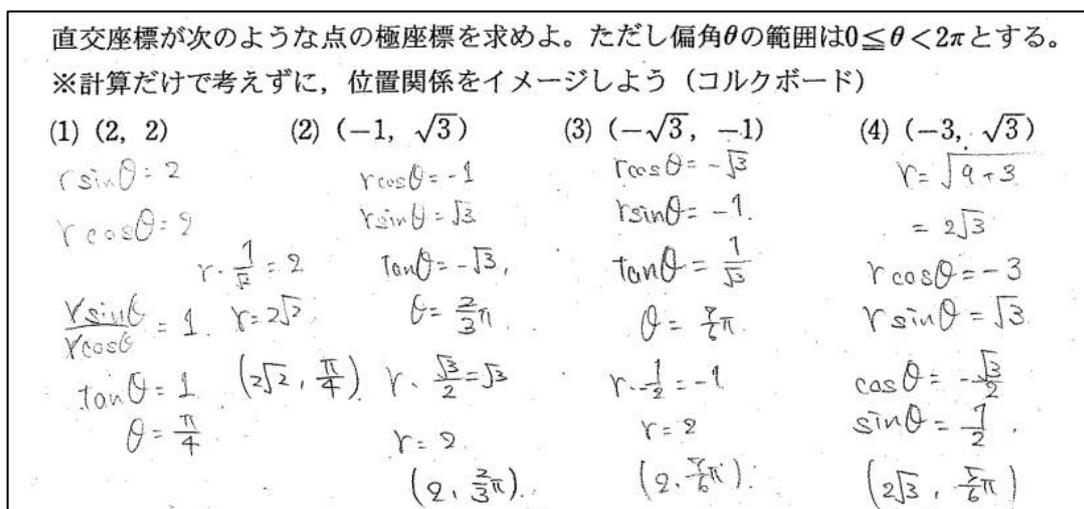
資料3は、イメージによる解答を選んだ生徒のワークシートである。x y 座標をとり、始線からの角度と動径の長さを求めて、極座標に表すことができた。

資料4は、公式を利用して解答した生徒のワークシートである。公式を利用することで素早く、簡単に導くことができた。生徒の解答はイメージからの解答が10人、公式利用の解答が14人であった。

資料3 イメージからの解答例



資料4 公式利用の解答例

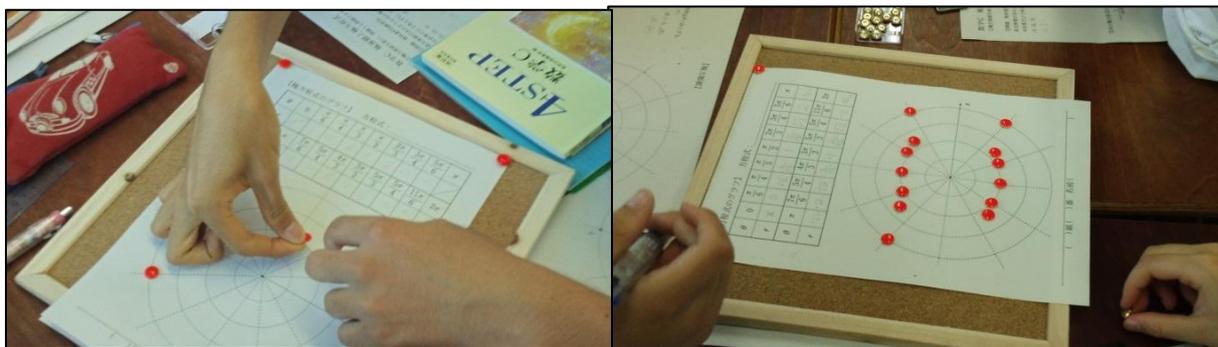


公式利用した14人に「公式をどのように使ったか」の自由記述アンケートをしたところ、「座標をイメージしながら公式が浮かんだ」、「rとcos θ の関係が分かっているので、自然と使えた」、「公式がイメージできた」など、暗記だけに頼らない回答が得られた。公式を使いながらも、図をイメージすることによって、視覚的に座標を変換することができた。

ウ 極方程式を描くために行う操作的活動

極方程式のグラフをかく問題において、グループによる操作的活動を行った。資料5のように、表からコルクボードに画鋲で点をとった。 r が負になるときの処理について、各グループで活発な話し合いが行われ、それぞれの考え方について検討することを通して、数学的な思考力・表現力を育むことができた。資料6は、グループ発表の様子である。生徒の解答は、直線を1本かいたグループと2本かいたグループに分かれた。検討の場面で、「マイナス方向にマイナスだけ進んだら、反対側に進む」と説明したグループの意見から、 r が負の時には π 位相することにより、直線は1本になることがイメージできた。

資料5 $r = \frac{1}{\sin\theta}$ のグラフを作る様子



資料6 グループ発表とまとめの様子



(2) 学習評価を指導に生かす授業展開の工夫

ア ワークシートの見取りからの評価

ワークシートで、直線を2本かいたグループがあったことから、 π 位相することをまとめとして丁寧に指導した。その後、実態調査で $r = \frac{1}{\cos\theta}$ のグラフをかく問題を扱ったところ、直線を2本かく生徒はおらず、 r が負になったときには π 位相することがしっかりと定着したと思われる。

イ 自力解決における指導と評価の一体化

評価の視点の「おおむね満足できる」評価に到達していない生徒の改善を図るために、メジャーやワークシートを用意したことで、次の(ア)、(イ)、(ウ)のように生徒を導いた。

(ア) 極方眼紙の補助線に慣れず、極座標を取れない生徒に対して、メジャーを個別に操作させる。

本時では、メジャーの動径の長さを固定して回転したとき、補助線がどんな役目か考えるよう個別指導することによって、極座標をかくことができた。

(イ) 極座標から直交座標を求められない生徒に対して、ワークシートで具体例を用意した。

本時では、直交座標が求められない生徒に、 r と θ の関係を考えるよう個別指導することで、図の関係から直交座標を求めることができた。

(ウ) 直交座標から極座標を求められない生徒に対して、ワークシートで具体例を用意した。

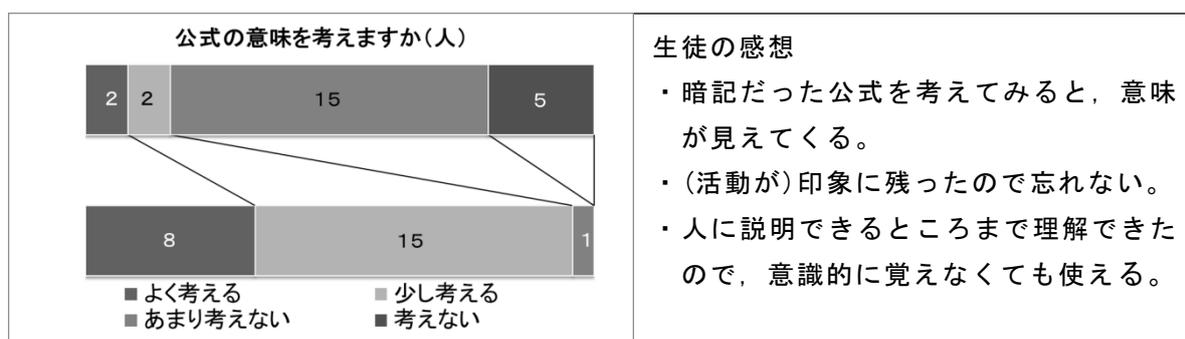
本時では、直角三角形の斜辺を r 、角度を θ とおいて、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を作り計算することができた。

(3) 意識調査から

図3は、公式の意味を考えることについての調査の結果をまとめたものである。公式の意味を考えて理解しようとする生徒が、事前調査に比べ増加し、ほぼ全員の生徒が公式の意味を考えるようになっている。授業の感想から考察すると、「公式は暗記するもの」と考えがちだった生徒が、操作的活動を通して、公式を他者に説明できるくらいまで実感的に理解できるようになり、公式の意味を考えることができるようになった。

図3 調査の結果（事前・事後の比較）と感想

（事前：平成25年9月12日実施，事後・感想：平成25年10月4日実施，24人）



さらに、「努力を要する状況」から「おおむね満足できる状況」へ評価を上げた生徒からは、「授業のスピードについていけなかったが、声掛け(個別指導)によって考えられた。」、「自分の行き詰まった部分のアドバイス(個別指導)があったから、考えることができた。」という感想があった。

教師が適切な評価をすることで生徒の理解度を把握し、それに応じた助言や手立てにより、生徒の数学的な思考力・表現力を育むことができると考える。

7 成果と課題

(1) 成果

- ・ 数学的活動としての操作的活動を行ったことで、公式の意味や考え方を実感することができた。操作的活動により、具体的なイメージを持つことができ、数学的な思考力・表現力を育むことができた。
- ・ グループごとに考察し説明する活動によって、より分かりやすい表現方法を考えることができた。
- ・ 生徒の実態に即した評価の視点を設定することで、教師が段階に応じた手立てを準備でき、その手立てによって、生徒達は数学的な思考力・表現力を育むことができた。

(2) 課題

- ・ 「おおむね満足できる状況」に引き上げるための手立てが大切であることから、日々の授業の中で効果的な手立てとしての数学的活動を今後も研究・開発していきたい。
- ・ 他の単元でも、生徒の実態に合わせた評価の視点を、具体的に設定して指導にあたりたい。

3 研究のまとめ

算数・数学科では、研究主題「数学的な思考力、表現力を育む算数・数学科学習指導と評価」に迫るために、ねらいを明確にした算数的活動・数学的活動を通して研究を進め、県内小学校2校、中学校1校、高等学校1校で授業研究に取り組んだ。

以下、授業研究の取組から、本研究実践について主な成果と課題を述べる。

(1) 成果

ア ねらいを明確にした算数的活動・数学的活動の工夫

小学校では、図形の面積を求める課題において、既習の図形に着目できるようにする操作活動とお互いの考えを伝え合う活動を設定することで、自分の考えを筋道立てて思考したり表現したりすることができた。また、自分の考えを、図や式、表などを関連付けて説明する活動を設定することで、根拠を明らかにして思考したり表現したりすることができた。

中学校では、連立方程式を解く手順について、根拠を明らかにして説明し伝え合う活動を設定することで、加減法と代入法の特徴やよさについて考え、表現することができた。また、一次関数の式からグラフをかく手順について、根拠を明らかにして考え説明し伝え合う活動を設定することで、表、式、グラフを相互に関連付けて思考し、表現することができた。

高等学校では、既習事項を想起させてから操作活動を導入し、自分の考えを説明し伝え合う活動を設定することで、公式の意味について理解を深めたり、表現力を高めたりすることができた。また、課題設定を工夫することで、問題の意味を視覚的に理解することができ、事象を数学的に考察したり、発展的に思考したりすることができた。

イ 学習評価を指導に生かす授業展開の工夫

小学校では、評価規準に照らし合わせたワークシートの見取りを行うことで、視点を絞り、根拠をもって評価することができた。また、「おおむね満足できる」状況と「十分満足できる」状況を明確に設定することで、その時間で身に付けさせた力が明確になり、数学的な思考力・表現力を育むことにつながった。

中学校では、ワークシートの記入のさせ方を工夫することで、それぞれの学習過程における個々の考え方や理解について評価し、その後の指導に生かすことができた。評価規準を明確にした指導は、数学的な思考力・表現力を育むために有効であった。

高等学校では、評価規準に照らし合わせて指導することで、それぞれの生徒の学習状況が把握でき、指導に生かすことができた。また、「努力を要する」状況から「おおむね満足できる」状況にするための具体的な手立てをあらかじめ設定しておくことで、授業のねらいに迫ることができた。

以上のことから、ねらいを明確にした算数的活動・数学的活動を通して、学習指導と評価に具体的な手立てを講じたことは、数学的な思考力・表現力を育むことにつながったと考える。

(2) 課題

数学的な思考力・表現力を育むためには、具体的な評価規準に照らし合わせてねらいを明確にした手立てを講ずることが大切である。指導に生かす評価を日常的に行いながら、効果的・効率的な評価の在り方について追究していくことが課題である。

<引用文献>

文部科学省「小学校学習指導要領解説 算数編」平成20年8月

文部科学省「中学校学習指導要領解説 数学編」平成20年9月

文部科学省「高等学校学習指導要領解説 数学編」平成21年12月

関係者一覧

1 研究協力員

| | | |
|-------------|----|--------|
| 龍ヶ崎市立城ノ内小学校 | 教諭 | 浅野 真由美 |
| 阿見町立阿見第二小学校 | 教諭 | 福岡 信一 |
| 銚田市立銚田北中学校 | 教諭 | 濱谷 一正 |
| 県立牛久栄進高等学校 | 教諭 | 慶野 清貴 |

2 茨城県教育研修センター

| | |
|----------|-------|
| 所長 | 武井 一郎 |
| 教科教育課 課長 | 金子 敏久 |
| 同 指導主事 | 横田 康浩 |
| 同 指導主事 | 中澤 斉 |