

第4章 高等学校数学科におけるマルチメディア教材に関する研究

1 研究の趣旨

マルチメディアの進展により高度な画像処理，統一された操作環境，演算処理速度の大幅な向上が実現し，授業でのコンピュータの効果的な利用が可能になった。

数学でのコンピュータ利用の目的は，生徒に学習への関心を高め，理解を助け，思考力を鍛え，創造力を養うことであると考えられる。数学では，具体的な実例を通じた深い洞察により，結果を予測し，その後に厳密な証明が与えられるという形で論理がつくられる場合があり，また，操作・実験による具体例を通して事実そのものを納得することもあつた。私たちは，生徒と教材の間で相互作用が常に働き，生徒が思考の正しさの確認を即座にすることができ，従来の紙と鉛筆を使い，頭の中でのみ操作するという論理中心の数学から実験を加味した数学に変えることが可能となる教材の開発をめざした。

この研究では，マルチメディアの技術を数学的実験の道具及び数学を身近に感じるための手段としてとらえ，教材の開発を行い授業実践を行う。

2 研究の内容

(1) 教材ソフトウェアの作成

ア 教材のねらい

関数の学習は，グラフを描いたり，最大・最小を求めたり，解決方法がわかっている問題を手順に従って解いていくことだけではない。方程式とグラフとの間に何か決まりや関係がないかを予想し，簡潔に，明瞭に，的確に表現し，形式的に処理していく過程も大切である。この教材では，二次関数のグラフをマウス操作で自由に移動できることにより，式とグラフとの間に成立する関係の直感的な理解を助けること，また写真に放物線を重ねることで自然現象の中で数学を身近なものとして感じられるようにすることをねらいとする。

イ 教材作成の留意点

- ・ 実験・操作により数学的事実を納得できるようにする。
- ・ 学習内容の汎用性を高め，さまざまな生徒の実態，学習進度，授業展開で利用できるようにする。
- ・ 教師，生徒が自由な発想で教材ソフトウェアを利用できるようにし，教材ソフトウェアからは，生徒に対して学習の手順を示すなどの指示を与えないようにする。
- ・ ハードウェアに依存せず，統一された操作環境を実現できるWindows上で実行できるようにソフトウェアを作成する。

ウ 作成手順

(ア) 内容の検討

現在の授業の見直しを行い，通常の板書では説明が難しい授業内容やコンピュータ利用による効果的な展開が期待できる題材を選び出す。その後，コンピュータ利用の意義，効果等を考慮し，利用する科目，一斉授業や個別授業等の授業の形態，説明やまとめ等の利用場面を検討する。次に，教材が技術的に実現可能で

あるかを検討し、開発教材の概要を決定する。

(イ) プログラムの機能の検討

授業を想定した教材ソフトウェアの機能を検討し、仕様を決定する。

(ロ) プログラミングとその改良

仕様を満足する教材ソフトウェア開発のためのプログラミング言語を決定し、プログラミングを行う。作成した教材は、複数の授業担当者により随時テストを行い問題点、改良点を探り、プログラミングに反映させる。

(エ) 授業実践と教材の改良

授業で実際に利用し、生徒の目により不都合を発見し、改良作業を行う。

(2) 授業研究

教材ソフトウェアは、二次関数の単元のさまざまな授業展開で活用できるように作成した。ここに示す授業研究は、この教材ソフトウェアを利用した授業の一例である。

ア 単元

二次関数とグラフ

イ 単元目標

具体的な事象の考察を通して、二次関数について理解させ、基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り、それらを的確に活用する能力を伸ばすとともに、数学的な見方や考え方のよさについて認識を深める。

ウ 学習計画

1章 二次関数とグラフ	1 二次関数とそのグラフ
①関数	1 時間
②二次関数	6 時間
③二次関数の決定	2 時間
・問題	1 時間

エ ねらい

$y = x^2 + b x + 1$ の1次の係数 b の値の変化に伴うグラフの変化を直感的にとらえ、論理的に考察する。

- ① 二次関数の二次の係数及び定数項の値の変化に伴うグラフの変化を理解する。
(知識・理解)
- ② 二次関数の一次の係数の値を変化させ、グラフの変化を直感的に理解する。
(関心・意欲・態度)
- ③ グラフから理解できた事項を自分の言葉で表現する。
(表現・処理)
- ④ 二次関数の一次の係数の図形的な意味を発見し、論理的に考察する。
(数学的な見方・考え方)

オ 授業展開

ねらい	○教師による指示, 説明, 発問	◎生徒の活動	備考
	学 習 活 動	指導上の留意点及び評価	
(導入) ・ $y=ax^2+bx+c$ の係数の値の変化とグラフについてまとめる。 ・ b の値の変化に注目するという目標の理解。 (10分)	○コンピュータ, ソフトを起動させる。 ◎コンピュータ, ソフトを起動する。 ○前回のプリント*1を配布する。 ◎前回わかったことを, ソフトを操作しながら確認し, まとめる。 ○一人だけで考えるだけでなく, 友達と一緒に考えてもよい。 ○生徒が, 確認しまとめた事項を発表させる。 ◎発表生徒の操作画面を全員に見せながらまとめたことを発表する。	・ 全員正常に起動できたかを確認する。 (評) a, b, c の値とグラフの変化を理解できたか。(知識・理解) ・ 自分で関係を確認し, 自分の言葉で他人に説明できるようにすることを強調。 (評) 本時の目標を理解したか。(関心・意欲・態度) ・ 同じ内容でも数多く発表させる。 (評) 自分の考えを整理し, 人に伝えることができたか。(表現・処理)	①
(展開) ・ 2次関数のグラフを各自表示し b を変化させた時のグラフの変化を理解する。 (30分)	○ $y=x^2+bx+1$ を調べる。 ○係数 b を連続的に変化させ, 連続的に移動するグラフを観察させる。 ◎係数 b を変化させ, グラフの変化を観察観察し, まとめる。 ○頂点に注目している生徒の画面を全員に見せ, 考える方向を与える。 ◎移動途中のグラフの頂点を, 画面上にマークし, 座標を測定する。 ○数多くの頂点の位置を通る放物線の方程式を考えさせる。 ○マークした頂点を通るようにグラフを変形し, 2次式を確定させる。 ◎グラフを移動し, 2次式を確定する。 ○ $y=x^2+bx+1$ から頂点の座標を式の変形により導く。	・ 取り組みが遅い生徒には, 関心・意欲が持てないのか, 操作方法が理解できないのか, 自分の考えを表現するのにとまどっていないかを判断して, 適切なアドバイスを。 ・ 頂点の座標に注目させる。 ・ 他の生徒と異なる視点から考えている生徒の発想を大切にする。 (評) 意欲を持って主体的に課題に取り組んでいるか。(関心・意欲・態度) ・ 発展学習として, 軌跡に言及する。 (評) 数多くの試行から直感で類推したことを論理的に考えられたか。(数学的な見方・考え方)	② ③
(まとめ) ・ 2次関数のグラフを理解する上で重要な係数の図形的な意味をまとめる。 (10分)	○係数の意味を確認し, まとめる。 ◎プリントをまとめて提出する。	(評) 関数のグラフと係数の関係を理解したか。(知識・理解)	④

- 備考 ①既習の事項であっても, 式とグラフの関係については言及しない。
 ②自分で気づかせるために, なるべく内容に関するヒントは与えない。
 ③個別学習中は, 机間をまわり, 生徒の意欲, 態度を認める言葉を全員にかけるようにする。
 ④プリントにまとめを記入する時は, 自分で書いた文章を消さないように指導する。

* 1 この授業の前に, コンピュータ, ソフトの操作方法の説明をかねて, 2次関数の係数の図形的な意味を探る授業を実施した。係数を連続的に変化させ, 連続的に移動するグラフの観察を通して, 図形的な意味を次に示すプリントにまとめる授業展開である。

2次関数のグラフ 1年組 氏名	
問1 $y=a(x+b)^2+c$ のグラフについて, 次の事項を調べ, わかったことを自分の言葉でまとめなさい。 (1) a の値の変化とグラフの変化 (2) b の値の変化とグラフの変化 (3) c の値の変化とグラフの変化	問2 $y=ax^2+bx+c$ のグラフについて係数の値の変化とグラフの変化についてわかることをまとめなさい。 問3 $y=a(x+b)(x+c)$ のグラフについて係数の変化とグラフの変化についてわかることをまとめなさい。

<授業プリント>

2次関数のグラフ 1年組 氏名

問1 $y=ax^2+bx+c$ のグラフについて、次のことをまとめなさい。

(1) a の値の変化とグラフの変化

(2) b の値の変化とグラフの変化

(3) c の値の変化とグラフの変化

問2 $y=x^2+bx+1$ のグラフについて、b の値の変化とグラフの変化についてまとめなさい。

カ 生徒の感想

1年7組 ①

このコンピュータを使った授業は、とてもおもしろい
 と思いました。例として、a, b, c の値の変化により、
 どのようなグラフが描かれるのか、
 c の値が異なる場合のグラフの描き方、
 例として、a, b, c の値が異なる場合、
 コーディネート平面上に描く方法を
 言葉や式で説明する、
 ... a, b, c の値が異なる場合、
 授業のやりかたは、楽しく学ぶことが
 できたと思います。
 (例として、a, b, c の値が異なる場合、
 コーディネート平面上に描く方法を
 言葉や式で説明する、)

1年7組 ②

今回の授業は、とてもおもしろい授業
 でした。
 今回の授業は、とてもおもしろい授業
 でした。
 今回の授業は、とてもおもしろい授業
 でした。
 今回の授業は、とてもおもしろい授業
 でした。
 今回の授業は、とてもおもしろい授業
 でした。
 今回の授業は、とてもおもしろい授業
 でした。

1年7組 ③

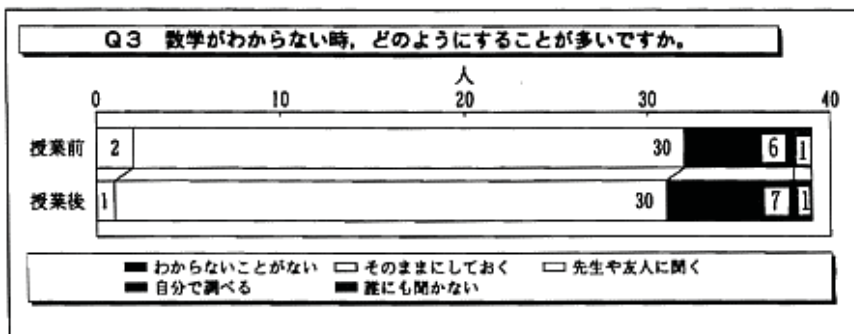
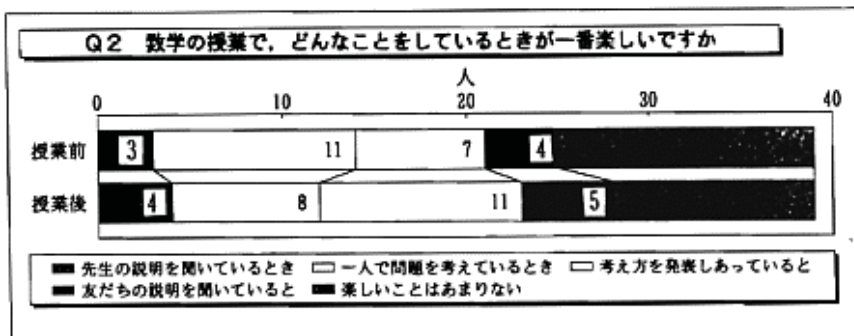
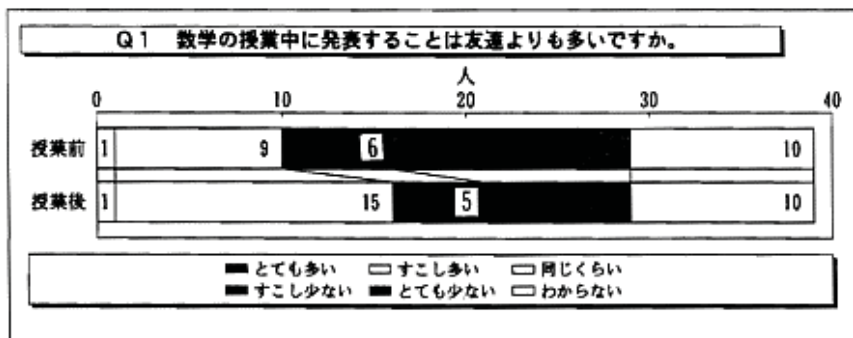
今回の授業は、とてもおもしろい授業
 でした。
 今回の授業は、とてもおもしろい授業
 でした。
 今回の授業は、とてもおもしろい授業
 でした。
 今回の授業は、とてもおもしろい授業
 でした。
 今回の授業は、とてもおもしろい授業
 でした。

1年7組 ④

今回の授業は、とてもおもしろい授業
 でした。
 今回の授業は、とてもおもしろい授業
 でした。
 今回の授業は、とてもおもしろい授業
 でした。
 今回の授業は、とてもおもしろい授業
 でした。

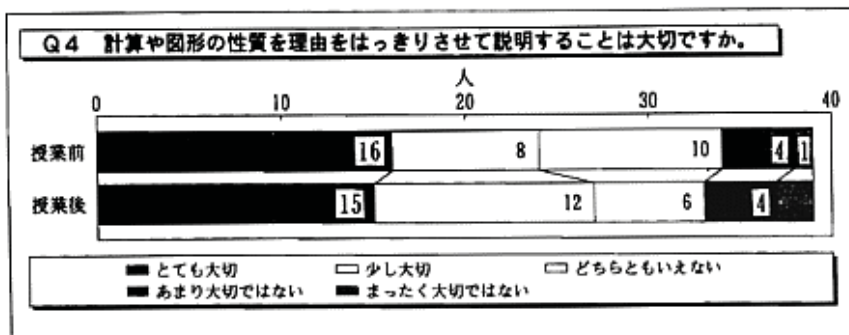
※ 考察

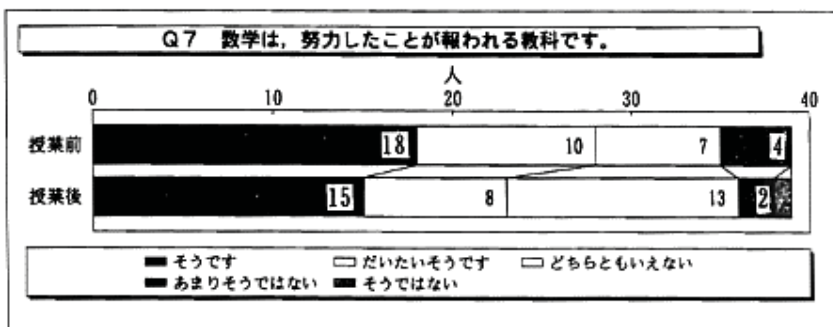
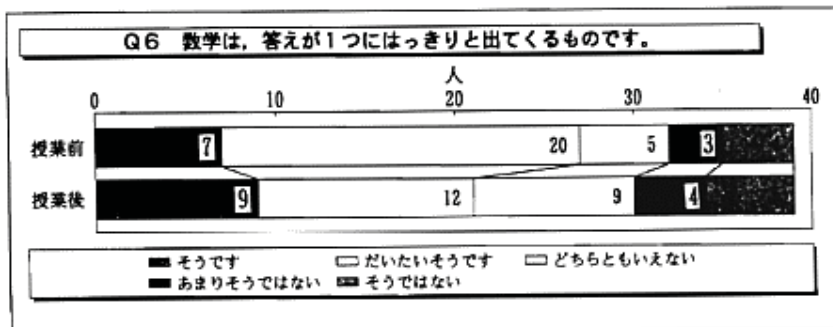
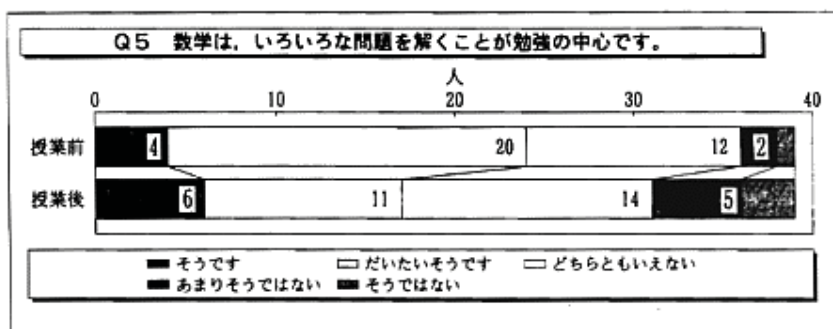
研究授業の前後で数学に対する生徒の考え方についてアンケート調査を行った。
(平成 8 年10月24日 1 年 7 組 39人)



生徒は、授業で発表することが増えたと感じており、一人で問題を考えるより、自分の考えを発表しあうことに楽しさを感じてきている (Q1, 2)。

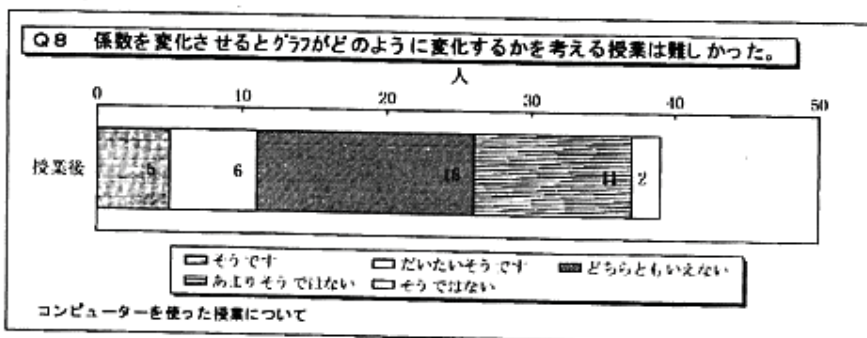
また、わからないことをそのままにせず、聞いたり調べたりしようという姿勢も見られる (Q3)。ツールの共有が、生徒の授業に対する取り組み方を個人的なものから相互のコミュニケーションを重視する方向に向け始めていると思われる。

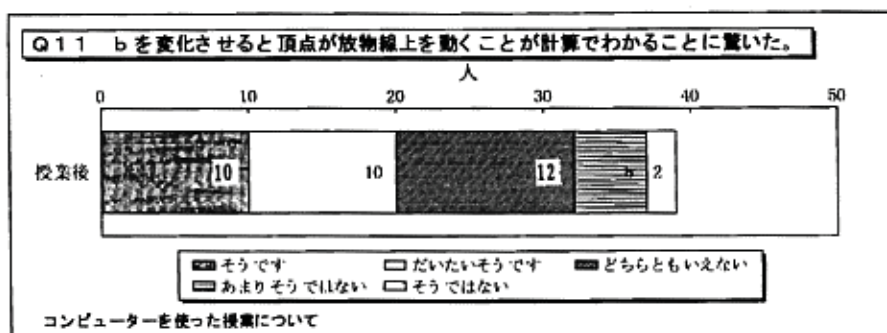
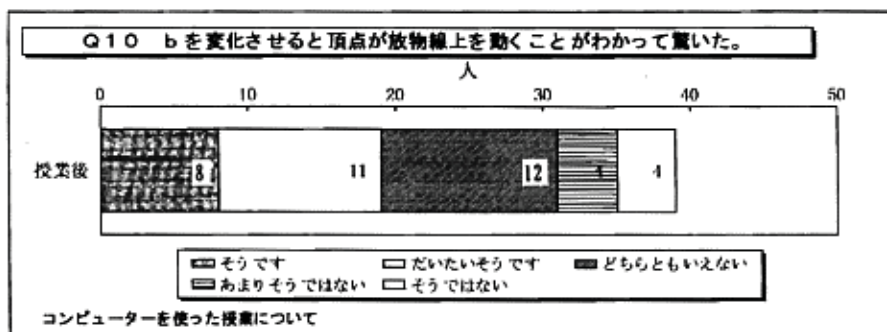
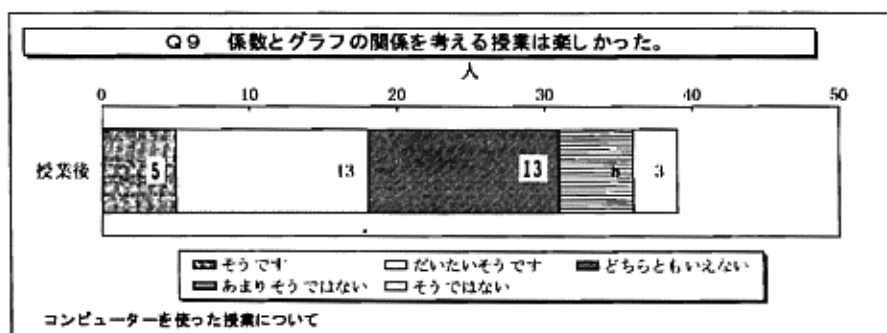




計算や図形の性質について理由をはっきりさせて説明することの大切さが重視されている (Q4)。これはお互いに考えを発表したり聞いたりする中で、相手を納得させるために必然的に発生した論理的な思考への変化といえよう。

「数学とはいろいろな問題を解くことが勉強の中心である」(Q5)「数学の答えはひとつ」(Q6)といったいわゆる従来の学習形態への固定概念から開放され、二次関数の学習を通して、現象を考察したり自分のさまざまな発想を確認するといった実験ができるようになった。「数学において努力したことは報われる」(Q7)という数値が下がっているが、単純なドリル的な学習よりも工夫や発想の転換が重要であるという生徒の意識の変化であるという見方もできるのではないだろうか。





コンピュータを利用した授業は、普通の授業よりも楽しかったという感想が、アンケートや感想文からも多数読み取ることができる(Q9)。それは、新しい授業形態が生徒にとって満足できるものであることと、二次関数の問題を視覚的にとらえることができた驚きや、概念が計算式によって確かめられた驚き・感動によるものであろう(Q10, Q11)。

今回の授業実践を通して、生徒は何らかの変容を見せていると思われる。それは、今までの授業への関わり方をもっと主体的なものに変えることであり、また、固定された価値観を打ち破り多様な考えを認めようとするのではないかと考えられる。



3 ソフトウェアの内容

(1) ソフトウェア名 二次関数のグラフ (Niji.exe)

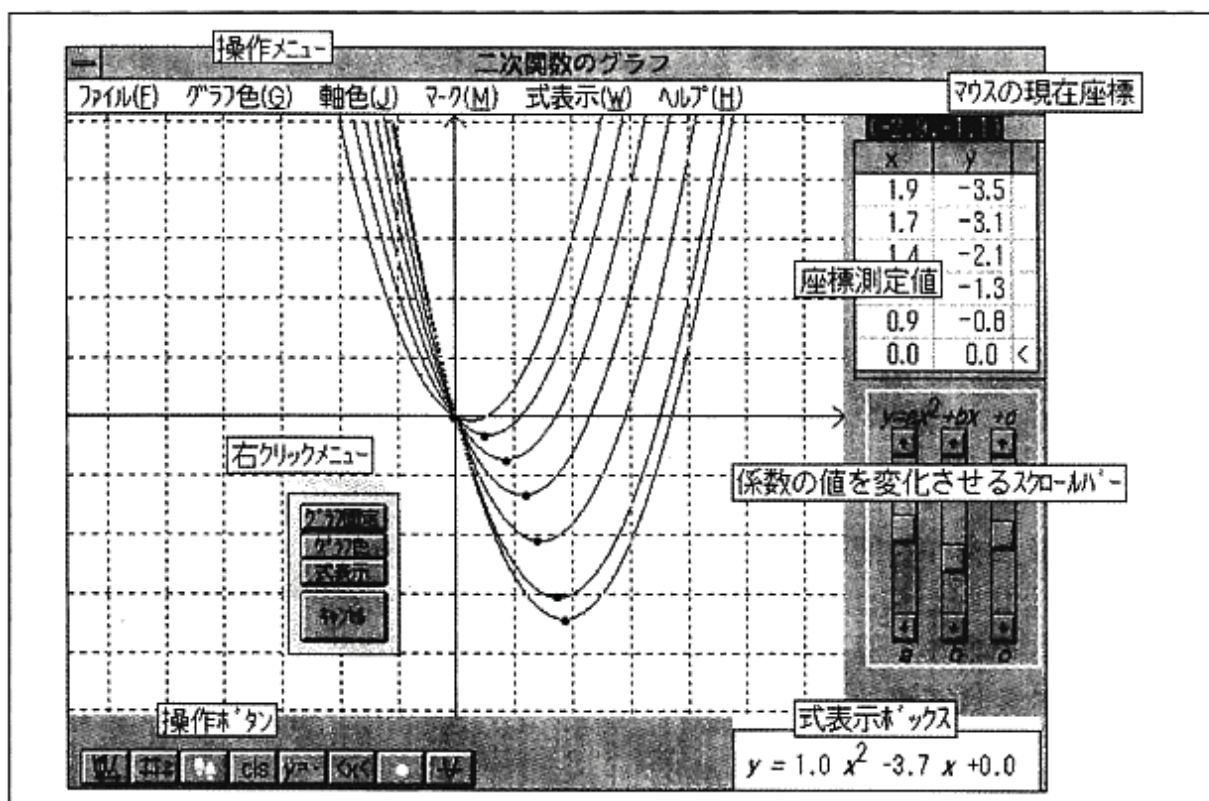
(2) 動作環境

- ・ OS Windows3.1/Windows95 が動作するコンピュータ
- ・ 画面解像度 640×480ドット以上
- ・ 画面発色数 256色以上
- ・ 推奨CPU DX4, 100MHz以上

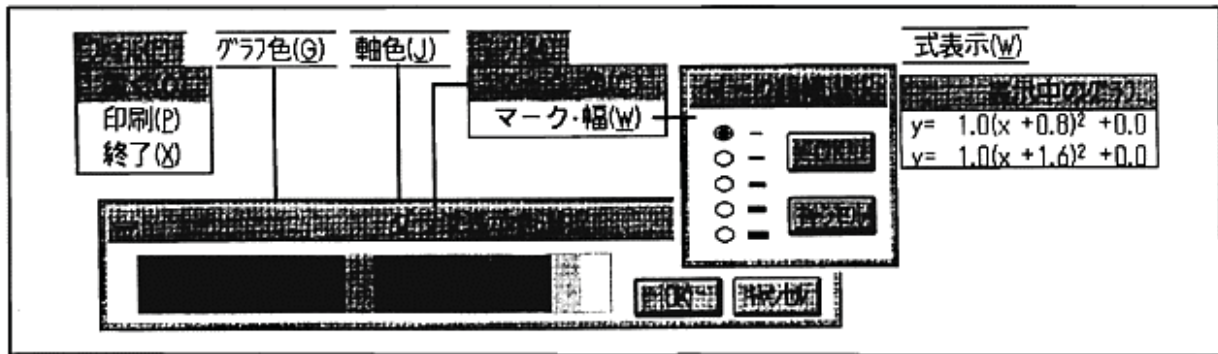
(3) 特徴

- ・ マウス操作による係数の変化が直ちに画面上のグラフの形に反映される。また、マウスの移動、係数の変化に伴って放物線が連続的に移動するために、係数とグラフの関係を容易に把握できる。
- ・ 移動中のグラフを画面に残し、その変化を観察できる。
- ・ $y = ax^2 + bx + c$, $y = a(x + b)^2 + c$, $y = a(x + b)(x + c)$, 3種類の式表現を利用可能にした。
- ・ 操作ボタンによる直感的な操作を可能にした。
- ・ 物体の斜め投射等の画像にグラフを重ねて表示できる。
- ・ 任意に原点を定め画面上の座標を測定できる。
- ・ 定義域を色を変えて表示することで、値域、最大値、最小値を捉えやすくした。
- ・ $y > 0$ の範囲でx軸の色を変えて表示することで二次不等式での利用にも配慮した。

(4) 画面の構成



ア 操作メニュー



(ア) ファイル

「開く」 グラフ表示領域に別に用意した画像ファイル (BMP ファイル) を読み込む。

「印刷」 現在表示されている画面をプリンターに印刷する。

「終了」 プログラムの終了。

(イ) グラフ色

移動するグラフの色は、常に黒である。グラフの色を変更するには、色見本の中から色を選択し、「OK」をクリックする。または色見本をダブルクリックして変更する。なお、この時点で式は記憶され、「式表示」で記憶した式を見ることができる。

(ロ) 軸色

座標軸が見えにくくなった場合に座標軸、目盛の色を変更する場合に利用する。変更方法は「グラフ色」と同様である。

(ハ) マーク

「マーク・色」 座標を測定したときに画面に表示される点の色を決定する。色の選択方法は「グラフ色」と同様である。

「マーク・幅」 座標を測定したときに画面に表示される点の大きさを決定する。大きさを選択し、「OK」をクリックする。

(ニ) 式表示

グラフの色を変更したとき、及び「右クリックメニュー」で「グラフ固定」を選択したときに、グラフの式が記憶される。このメニューは、記憶したグラフの式を表示する。グラフ表示領域に表示されているグラフの色と同じ色で式が示される。

(ホ) ヘルプ

簡単な操作説明を表示する。

イ マウスの現在座標

マウスの現在座標を常に表示する場所である。原点の移動を行うと自動的に新しい座標系での値を表示する。

ウ 座標測定値

操作ボタン「座標の測定」がオンのときに、グラフ表示領域で左クリックすると、現在のマウス位置に点が打たれ、測定値が表に表示される。表示できるのは、最大6点である。7点目以降は、最下行に上書きされる。測定値は「<」の位置に記録される。「<」は、上下の矢印キーまたはマウスの左クリックで移動できる。また、「DEL」キーを押すと「<」で示された場所の測定値が削除される。なお、原点の移動を行うと自動的に新しい座標系での値に変換される。

エ 右クリックメニュー



グラフの固定

移動中のグラフが、このボタンを押した時点でグラフ表示領域に固定されて、グラフの式を記憶する。



グラフ色

操作メニューの「グラフ色」と同様である。



式表示

操作メニューの「式表示」と同様である。

オ スクロールバー

上下の小さな矢印を左クリックする毎に、係数値が0.1 間隔で増減する。中央部の小さな正方形にマウスカーソルを合わせ、左ボタンを押しながら上下に移動させると、係数値を大きく変化させることができる。なお、初期値では係数は、-10~+10の範囲で変化するが、頂点を移動し係数値がこの範囲を超えるときには自動的に範囲が調整される。

カ 操作ボタン



グラフの移動

マウスカーソルの位置が、頂点となるようにグラフが移動する。左クリックしてグラフの移動を中止する。



座標軸の移動

マウスカーソルの位置が、原点となるように座標軸を移動する。左クリックして座標軸の移動を中止する。



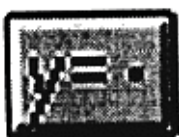
移動中のグラフ表示 (オン/オフ)

グラフをグラフ表示領域に残しながら移動する。「黒い足跡」のとき、移動途中のグラフをグラフ表示領域に残す。「白い足跡」のときは残さない。



画面の消去

画面を消去し、最新のグラフのみ表示する。測定点もクリアする。



式表示形式の変更

一度ボタンを押す毎に、二次関数の式表現を $y = ax^2 + bx + c$ 、 $y = a(x + b)^2 + c$ 、 $y = a(x + b)(x + c)$ の3種類で変更する。



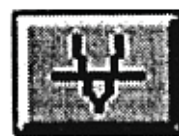
定義域表示

グラフ用紙下部にマーカーが現れ、この左右のマーカーを移動することで、定義域を色で区別、最大値・最小値を考えるときに利用する。(ク 教材ソフトウェアの利用例参照。)



座標の測定 (オン/オフ)

黒丸の時、グラフ用紙上で左クリックするとその点の座標が測定され、値が表に記録される。白丸で解除。



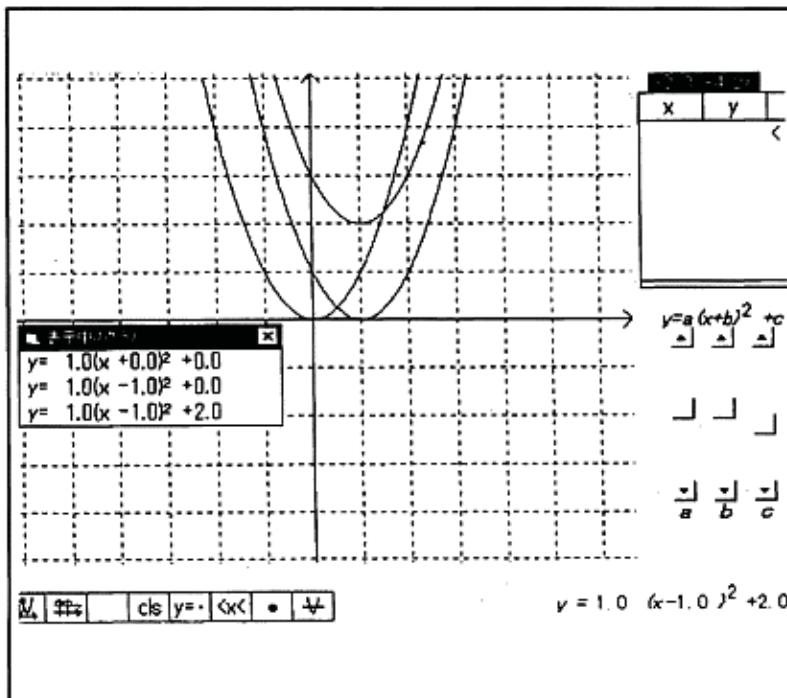
$y > 0$ の区間の表示

$y > 0$ の部分と、 $y < 0$ の部分で x 軸の色を変えて表示する。この色はグラフの移動にともなって動的に変化する。

キ 式表示ボックス

現在、移動対象となっている式を表示する。

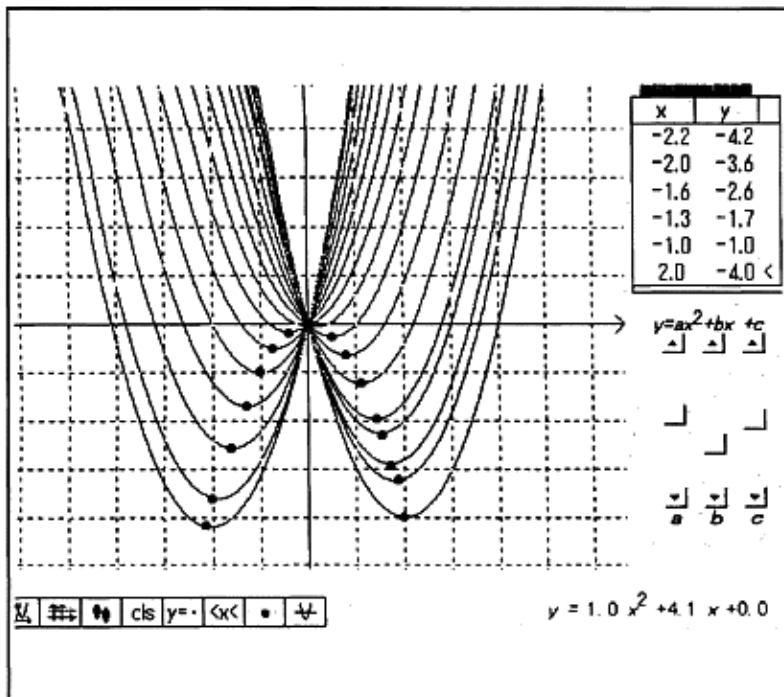
(ウ) グラフの平行移動 $[y = a(x - p)^2 + q]$



※ p, q の値の変化とともにグラフがどの方向へ平行移動していくかの様子がわかる。

※ 移動したグラフの式が表示できる。

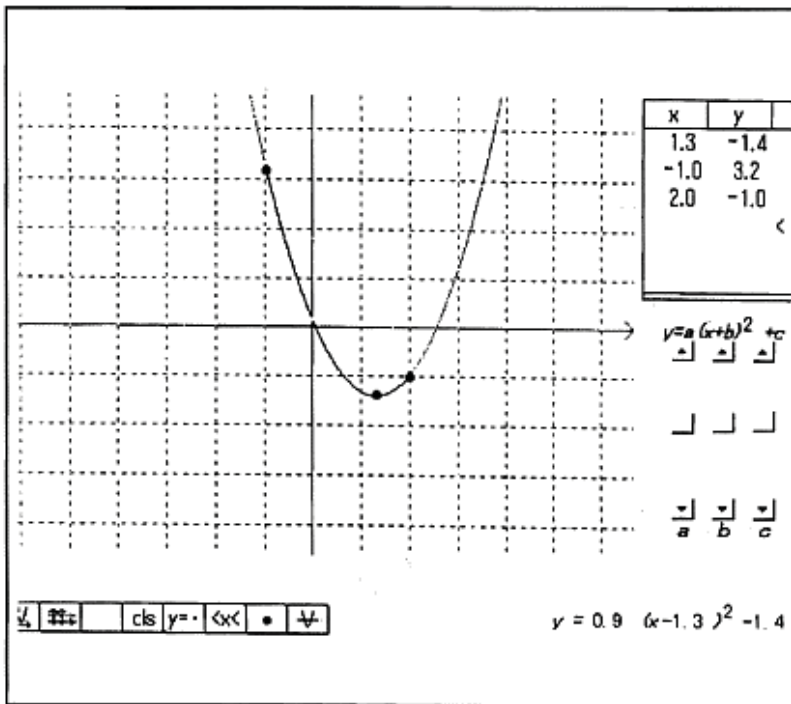
(エ) 二次関数の係数とグラフ $[y = a x^2 + b x + c]$



※ a, b, c の係数の値の変化によって、グラフが変化していく様子がわかる。

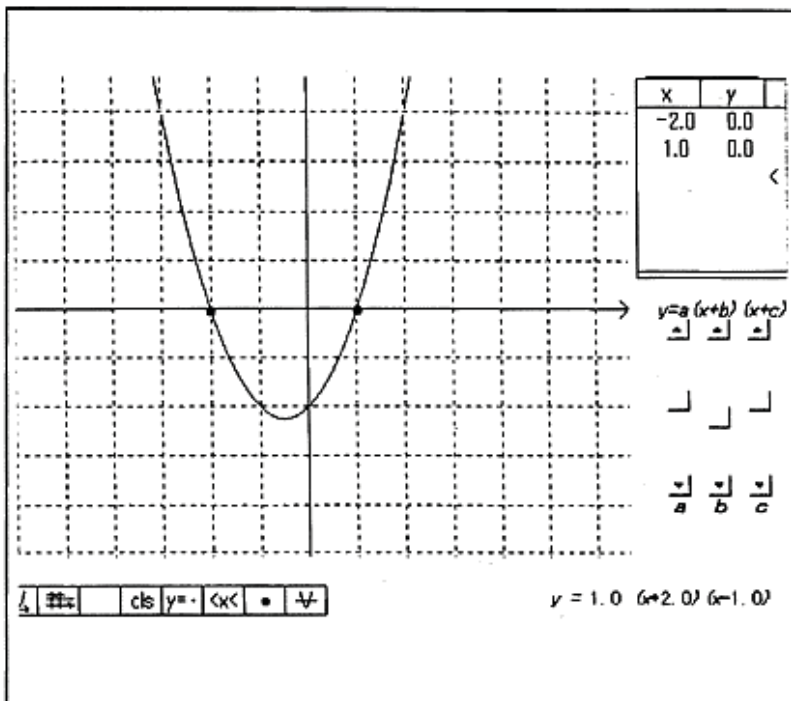
※ 左図は、 a, c の値を固定し、 b の値だけを変化させたときの頂点の移動の様子を表している。

(イ) 二次関数の最大値・最小値



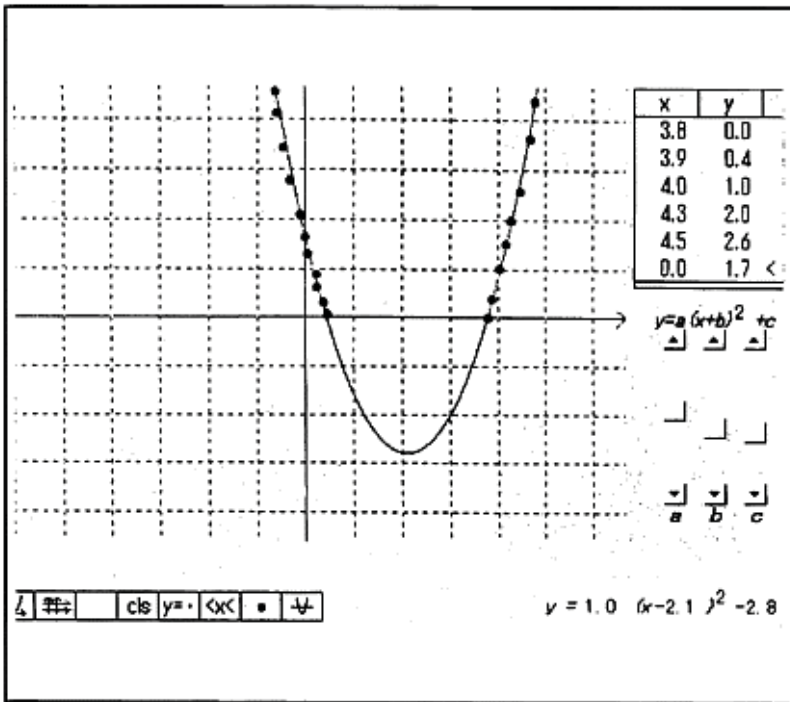
※ 定義域の範囲をスムーズに動かすことができ、定義域 ($-1 \leq x \leq 2$) における最大・最小となる点と、頂点の位置関係がわかりやすい。

(ロ) 二次関数のグラフと二次方程式 [$y = a(x + \alpha)(x + \beta)$]



※ 方程式 $a(x + \alpha)(x + \beta) = 0$ の解が、二次関数 $y = a(x + \alpha)(x + \beta)$ と X 軸との共有点の X 座標であることの確認が容易にできる。

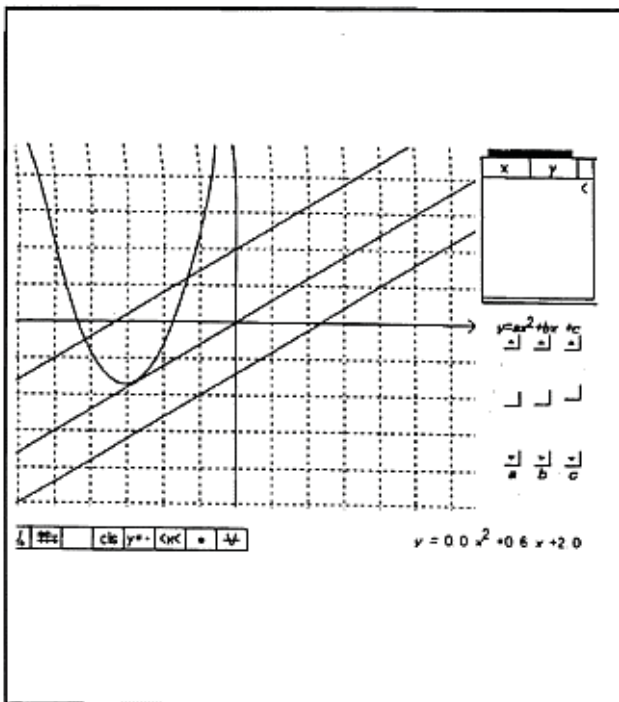
(キ) 二次関数のグラフと二次不等式



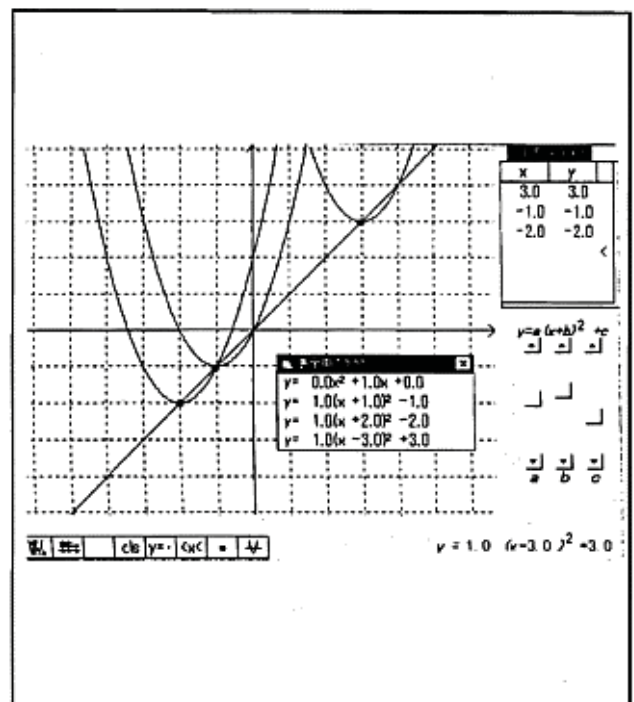
※ $ax^2 + bx + c > 0$,
 $ax^2 + bx + c < 0$ が,
 $y > 0$, $y < 0$ となるxの値
 の範囲をx軸の色を変えて表
 示することにより, 理解しや
 すい。

※ 左図は, 異なる2点の共有
 点をもつときの $y > 0$ となる
 xの値の範囲を表している。

(ク) 直線と二次関数のグラフ



例 直線と二次関数との共有点の個数
 の関係



例 頂点が直線上を動く二次関数の軌跡

4 研究のまとめ

私たちは、コンピュータを数学的実験をする道具、数学を身近に感じることでできる道具として活用できる教材ソフトウェアの開発をめざしてきた。十分な学習効果が期待できる教材であるためには、生徒、教師が学習の意図を明確に持ち、その意図が教材に十分に反映される必要がある。教師自らが教材を開発する意義は、学習の意図を明確に表現でき、生徒の声を直接取り入れながら、ソフトウェア細部にわたる改良が短時間にできることにある。授業研究を通して、私たちはこの意義を再確認した。

この教材は、二次関数の単元でさまざまな利用方法が考えられる。このソフトウェアの操作方法が直感的であり、容易に操作できたために、生徒はソフトウェアの使い方の習得に時間を費やすことなく、数学の本質的な部分に取り組むことができた。また、問題を解決していく過程などで用いられる数学的な見方や考え方を身につけたり、そのよさを認識するためには、生徒が主体的に取り組む学習が必要である。コンピュータを用いることで、体験的な学習の場を設けることができ、生徒の学習意欲を引き出すことができた。マルチメディアが、数学的な見方や考え方のよさを認識させることができる新しい授業展開の可能性をもたらしたと感じている。

5 今後の課題

数学は、主として理工系方面に利用されるものと考えられてきた。しかし、数学的な考察や処理は、社会の多くの分野で必要とされ、社会人の教養として重要な意義を持つに至っている。数学を活用するときには、すでに知識として持っている情報を数学的にいかに適応するかよりも、事象や現象の特徴を捉えてモデルを構成し、それを利用してうまく説明していく事の方がより大切である。数学の活用には、発展学習の場面、他の教科における学習場面及び日常の生活の場面での活用がある。これらの場面をとらえて、数学を他の問題や領域にも積極的に展開し、今まで見えなかった事柄が見えてくる実感を体験したり、数学と他の分野との関連を感じ取らせたい。今回の教材ソフトウェアで、板書では困難だった表現が容易に行えるようになったが、それにとどまらず情報機器の新しい利用方法を模索したい。

マルチメディアを数学の知識、事実を効率的に生徒に伝達するための手段にとどめず、数学を活用する態度の育成に寄与できるものに発展させていきたい。そのためには、教材開発と同時に授業展開の研究も進めたい。