

## 【授業研究3】 高等学校第1学年「不等式の証明」

### (1) 学習指導案

ア 単元 不等式の証明

イ 単元目標

簡単な等式、不等式の証明法を習熟し、推論の筋道を明確に認識する。

ウ 単元の数学的な見方や考え方のよさについて

(ア) 教材より

単元は「第4章 式と証明 3. 不等式の証明」である。この単元は新学習指導要領では「数学Ⅰ」から「数学A」に移された内容である。高等学校数学の基礎・基本にかかわる単元ではあるが、多くの生徒が難しさを感じる単元でもある。しかし、あえて、この難しい単元において、数学的な見方や考え方のよさが分かり、意欲を育てる指導の在り方について研究をすることにした。

この単元は、既習である「式の計算」を基礎にして、代数的な方法による証明の仕方を学ぶ。その際に、実数の大小関係を取り扱っているため、証明を考えると、見通しをもち筋道を立てて考えることができるよさがある。

また、展開、因数分解、分数式の計算などの既習事項を活用することによって、式の計算を学習することの必要性やよさを実感することができる。

さらに、ここで証明する不等式には、図形を使って直観的な説明ができる、文字を増やして一般化ができる、最大値や最小値を求める問題の解決に使える、などのよさがある。

(イ) 生徒の実態より

入学後実施した学力調査によれば、生徒の数学の学力は県平均にほぼ等しい。生徒は数学を単なる計算と見る傾向が強く、文字式の取扱いを不得手としている。

また、授業前の意識調査によれば、不等式に対する興味・関心があるとはいい難く、特に中学校で学んだ幾何の証明に対しては苦手意識をもっている。大半の生徒が数学の予習をしたことがなく、半数以上の生徒は復習も全くしない。

しかし、多くの生徒が、「内容の分かる授業」、すなわち内容が精選され、中学校の復習を行ったり、練習したり考えたりする時間が十分にある授業に期待をもっている。

(ウ) 指導にあたって

生徒が「数学のよさ」を感じるには、指導者がよさについて分析を行い、常に指導を実践する必要がある。この単元では、教科書にない身近な問題を導入に用いて、生徒が既習内容と新しい学習内容とを容易に連結できるようにした。

また、自力解決の段階において、問題解決の時間を十分にとり、生徒がいろいろと考える過程を大切にしようと考えた。その上で、「役に立つ、他に活用できる。」ことのよさを生徒が実感できるように配慮した。例えば、証明の指導においては、結論を示すばかりでなく、式がつくられた過程に興味をもたせたり、式のもつ有用性を認識させたりすることである。

そこで、本実践では、具体例の考察から一般的結果を見いだしたり、結果を推測してから証明する場面を設定したりすることで、数学的な見方や考え方のよさが感じられるようにしたい。

また、興味ある、発展的な課題に取り組ませることで、身に付けた知識を積極的に活用する態度を育てていきたい。

エ 学習計画

不等式の証明 5時間取扱い ————— 本時はその3時間目 (詳細は省略)

オ 本時の学習

(ア) 目標

- ・(実数) $a^2 \geq 0$ を利用して、(相加平均) $\geq$ (相乗平均)の関係を導くことができる。
- ・(相加平均) $\geq$ (相乗平均)の関係が、具体的な問題の解決に活用できることを実感する。

(イ) 準備・資料 課題プリント、ヒントカード

カ 展開

学 習 活 動	指導上の留意点・評価 (◎は評価)									
<p>1 学習課題1(プリント)について考える。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>A, B, C 3人の数学, 英語の得点が次のようになっている。平均を考えて順位をつけてみよう。</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">A</td> <td style="padding: 2px 10px;">4 (数学)</td> <td style="padding: 2px 10px;">100 (英語)</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">B</td> <td style="padding: 2px 10px;">80 (数学)</td> <td style="padding: 2px 10px;">20 (英語)</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">C</td> <td style="padding: 2px 10px;">45 (数学)</td> <td style="padding: 2px 10px;">45 (英語)</td> </tr> </table> </div> <ul style="list-style-type: none"> <li>・学習課題1について話し合う。</li> <li>・相加平均, 相乗平均の有用性を考える。 相加平均…一般的に利用する平均 相乗平均…片寄りに着目した平均</li> </ul> <p>2 学習課題2(プリント)について考える。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>次の空欄に適当な不等号を入れよう。</p> <math display="block">\frac{a+b}{2} \quad \square \quad \sqrt{ab}</math> </div> <ul style="list-style-type: none"> <li>・各自の考えで解く。</li> <li>・証明の必要性を話し合う。</li> <li>・証明を各自ノートに記入する。</li> <li>・証明ができないときは黑板のヒントカードを参考にする。</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>・板書の解答をみながら自分の答と比較する。間違っていれば訂正する。</li> </ul> <p>3 学習課題3(プリント)について考える。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>正の数 <math>x</math> とその逆数の和はつねに2以上である。今日学んだことを用いて解いてみよう。</p> <math display="block">x + \frac{1}{x} \geq 2</math> </div> <ul style="list-style-type: none"> <li>・証明を各自ノートに記入する。</li> <li>・板書の解答をノートに写す。</li> <li>・公式の有用性を話し合う。</li> </ul>	A	4 (数学)	100 (英語)	B	80 (数学)	20 (英語)	C	45 (数学)	45 (英語)	<p>◎ 生徒が課題について興味をもてたか。(観察)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・相加平均ばかりでなく、別の平均も考えられるように時間をとる。</li> <li>・相乗平均に気付かないときは、別の観点から相乗平均の必要性が分かるようヒントを与える。</li> <li>・「<math>\geq</math>」の解答が分からない生徒は具体的な数値を代入させてみる。</li> </ul> <p>◎ 「<math>\geq</math>」の解答が分かるか。(観察)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・証明の方針が分からない生徒には、ヒントカードを黑板にはって考えられるようにする。</li> </ul> <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>ヒントカード <math>A - B \geq 0 \quad A \geq B</math> <math>A^2 \geq 0</math> (等号は <math>A = 0</math> の時)</p> </div> <p>◎ 証明ができるか。(机間指導)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・教科書の証明を解説する。</li> <li>・この不等式を公式とすることを強調する。</li> </ul> <p>◎ 既習事項(式の計算)の大切さが分かったか。(観察)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・机間指導を行いながら、解答が不十分な生徒に助言をする。</li> </ul> <p>◎ 公式の有用性が分かったか。(観察)</p>
A	4 (数学)	100 (英語)								
B	80 (数学)	20 (英語)								
C	45 (数学)	45 (英語)								

### (3) 授業記録

ア 授業に際しては、指導者に加えもう1人が全体の反応を観察し、3人が一対一で抽出生徒に密着して反応を観察した。また、指導者自身で指導法の反省を行えるよう、別の1人が授業風景を映像で記録した。さらに、授業を行った後にアンケート調査を実施した。このように総合的・客観的な分析が行えるように配慮した。



課題プリントに取り組んでいる様子

#### イ 抽出生徒について

- A：数学の理解力に優れている。
- B：数学の理解力はやや欠けるが意欲はある。
- C：数学の理解力に欠ける。

#### ウ 展開と生徒たちの記録

展開と主な発問	全体の反応	抽出生徒の反応																		
		生徒 A	生徒 B	生徒 C																
<p>① 課題1を考えてみよう。 A, B, C 3人の数学と英語の得点か下の表のようになっている。平均を考えて順位をつけてみよう。</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>数学</td> <td>英語</td> <td>平均</td> <td>順位</td> </tr> <tr> <td>A</td> <td>4</td> <td>100</td> <td></td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>80</td> <td>20</td> <td></td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>45</td> <td>45</td> <td></td> </tr> </table>	数学	英語	平均	順位	A	4	100		B	80	20		C	45	45		<ul style="list-style-type: none"> <li>・配布されたプリントを読み、静かに課題に取り組んでいる。</li> <li>・ほとんどの生徒が正しい答えを記入できた。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・プリントが配布されるとただちに読む。</li> <li>・余白に計算して答えを記入し、計算を消す。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・プリントにすぐ目を通す。</li> <li>・プリントが配布された後もノートを見ている。</li> <li>・余白に計算して答えを記入し、計算を消す。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・プリントが配布された後もノートを見ている。</li> <li>・余白に計算して答えを記入し、計算を消す。</li> </ul>
数学	英語	平均	順位																	
A	4	100																		
B	80	20																		
C	45	45																		
<p>② 別の平均を考え、順位をつけなおせたいだろうか、近くの人と相談してもよいから、相加平均以外の平均について考えてみよう。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ところどころで相談している。</li> <li>・何人かの生徒が指名されるが、相乗平均の考えは出ない。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・となりの生徒と相談するが、分からない様子である。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・板書された答えの説明を聞いてから記入した。</li> <li>・鉛筆を持ったまま考えている。</li> <li>・「得点差」の考え、「重みをつける」考えには興味を示さない。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・下を向いたまま話を聞いている。</li> <li>・前の生徒と相談する。</li> </ul>																
<p>③ 課題2をやってみよう。次の空欄に適切な不等号を入れてみよう。</p> $\frac{a+b}{2} \quad \square \quad \sqrt{ab}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>・「<math>\geq</math>」をすぐに記入できた生徒が多かった。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・不等号は記入できなかった。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・「<math>\geq</math>」をすぐに記入できた。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・「<math>\leq</math>」を記入したが、その後、「<math>\geq</math>」と訂正した。</li> </ul>																
<p>④ これを証明してみよう。教科書・ノートを見てもよいから自分で考えてみよう。方針が立たない場合は黒板のヒントを見て考えよう。</p> <p><math>A - B \geq 0</math> と <math>A \geq B</math> <math>A^2 \geq 0</math> (等号は <math>A=0</math> の時)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・教科書・ノートを見る生徒が3分の1程度いた。</li> <li>・ヒントを見ても式変形ができない生徒が多い。</li> <li>・黒板の解答に注目している。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ノートを見る。</li> <li>・自力で考え始め、ノートをふせる。</li> <li> <math display="block">\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}</math> <math display="block">\frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - \frac{2\sqrt{ab}}{2}</math> <math display="block">\frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a}\sqrt{b})^2</math> </li> <li>・2まで書いて消す。さらに <math>(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab</math> と書いて消す。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・教科書をめくる。</li> <li>・差をとって考える。再度教科書をめくる。</li> <li> <math display="block">\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a}\sqrt{b})^2</math> </li> <li>・2まで書いて消す。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・教科書の例題2を写す。</li> <li> <math display="block">\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a}\sqrt{b})^2</math> </li> <li>・2まで書き、考えている。</li> </ul>																
<p>⑤ 別の証明をしてみよう。等号が成り立つのはどんな場合だろうか。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・発問の意味が理解できない生徒がいる。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・黒板の解答を写す。</li> <li>・黒板の方をみながら説明を聞く。</li> <li>・条件をじっと考えるが、分からない様子である。</li> <li>・まとめの説明をプリントを見ながら聞く。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・自分の考え方の正しさに気付いて、消したことをう一度書く。</li> <li>・「ルートを解消する」考え方に興味を示す。</li> <li>・説明を聞くが、黒板は写さない。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・黒板を見て写す。</li> <li>・黒板を写して、考えている。</li> <li>・教科書の該当部分にマーカーペンで線を引く。</li> </ul>																
<p>⑥ 分かったことをまとめておこう。</p> <p>2つの正の数について (相加平均) <math>\geq</math> (相乗平均) 等号成立は2つの数が等しいときに限る。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・黒板のまとめを一齐に写す。</li> <li>・教師のまとめにうなずく姿もみられた。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・課題を読んでから <math>x + \frac{1}{x} \geq 2</math> と書く。さらに、 <math>\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}</math> と書く。証明はできない。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・下を向いている。</li> <li> <math display="block">x &gt; 0, \frac{1}{x} &gt; 0</math> </li> <li>・のヒントで頭を上げ、黒板の解答を写す。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・氏名を記入する。下を向いたまま考えている。</li> <li>・黒板の解答を写す。</li> </ul>																
<p>⑦ 証明問題を解くとき、式の計算が大切だということがわかりますか。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・「役に立つ」よさか理解できた生徒は少ないようである。</li> </ul>																			
<p>⑧ 課題3を考えてみよう。正の数 <math>x</math> とその逆数の和はつねに2以上である。課題2で得られた関係式を利用して、このことを示してみよう。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・大部分の生徒が、どうやって考えたらよいか分からない様子である。</li> </ul>																			
<p>⑨ この時間に得られた不等式が公式のように使えることがわかりましたか。</p>																				



#### (4) 考察及び今後の課題

授業実施（平成5年9月29日）直後に、当該クラスの生徒43人（当日1人欠席）に対してアンケート調査を実施した。

まず、今回の授業の内容が、「相加平均・相乗平均」であるため、不等式に対する、中学時代の興味・関心について質問した。結果は、図7で示されているように、興味・関心があったとは言えないようである。

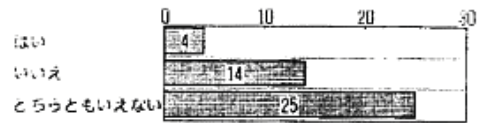


図7 中学の時、「不等式」について興味・関心はありましたか。

また、今回の授業の前までで、不等式についての理解度についても質問した。この結果は、図8であり、「理解していた。」と「やや理解していた。」との合計が、32人（74.4%）、「理解していなかった。」は1人もいなかったが、「あまり理解していなかった。」が11人（25.6%）もいたことは問題であった。

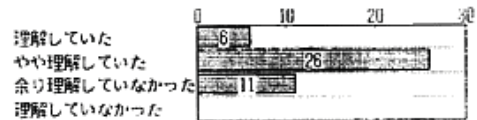


図8 今までの内容を理解していますか。

次に、図9、図10は、「数学のよさ」について質問したもので、どちらの図も、「わかりやすくなる。」等の「機能的なよさ」を感じた生徒が比較的多かったことを示しており、満足こそできないが、よい結果が現れているといえよう。しかし、図9は相加平均・相乗平均の関係を証明するところまでのものであり、今回のねらいの一つである、不等式の性質の

わかりやすくなる。  
役に立つ。他に活用できる。  
説明がきちんとできる。  
むだがない。はやくできる。  
いくつかをまとめて一般化できる。  
ことがらを文字、記号や数字で表せる。  
形式的・機能的にあつかえる。  
美しさがある。  
驚きがある。  
喜びがある。  
楽しさがある。



図9 「数学のよさ」について（証明するところまで）

（実数） $\geq 0$ を用いて証明するということからすれば、「役に立つ。」「他に活用できる。」が23.3%という数字は、反省すべき点の一つであろう。なお、「驚きがある。」の25.6%については、平均にも様々な定義があることが分かったからであろうと思われる。図10は、相加平均・相乗平均の関係を活用するというもう一つのねらいをも

わかりやすくなる。  
役に立つ。他に活用できる。  
説明がきちんとできる。  
むだがない。はやくできる。  
いくつかをまとめて一般化できる。  
ことがらを文字、記号や数字で表せる。  
形式的・機能的にあつかえる。  
美しさがある。  
驚きがある。  
喜びがある。  
楽しさがある。

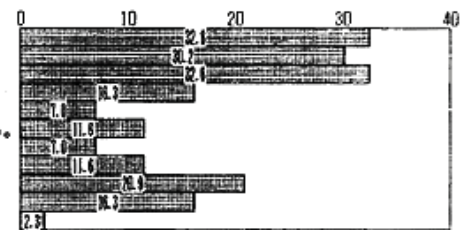


図10 「数学のよさ」について（証明してから）

っての授業をした結果であるが、「役に立つ。」と「他に活用できる。」が30.2%であり、期待した数字にはならなかった。今回は二つのねらいをもって授業に臨んだのであるが、生徒にとってはどちらの内容も予想以上に難しく感じられ、理解するには時間的にやや無理があったように思われる。実際、授業始めの平均を扱う場面で、生徒から得点の差を利用した考えや加重平均の考えを利用して順位を付けるような発言があったにもかかわらず、それらについて深く扱えずに授業を展開してしまった。さらに、授業後半の相加平均・相乗平均の関係を活用するところでも、もっとじっくりと問題の考察ができる時間をとるべきであった。何とか解けそうだという見通しがもて、興味・関心がわき、やる気ができるという、生徒の思考に結びつくところまでつながらなかった。

次に、図11、図12、図13は授業に対する意欲と不等式への興味・関心等の関係を示したものであり、「意欲があった。」が12人、「やや欠けていた。」が26人、そして「欠けていた。」が5人、というのが意欲の様子である。図11からであるが、「意欲があった。」の12人中7人が「興味・関心がわいてきた。」ということで半数程度しかなく理想的な数字とはいえない結果であった。また、図12では、「理解できた。」と「やや理解できた。」とを合わせた18人中9人が「意欲があった。」生徒であり、「意欲が欠けていた。」生徒は、「あまり理解できなかった。」や「理解できなかった。」と回答しており、授業を理解するためには、意欲がいかに大切であるかが示されたと考える。さらに、図13では、「次回の数学の授業は楽しみですか。」という質問に対する回答であり、予想していた以上に厳しい結果になってしまった。導入では具体的な身近な例で興味を持ったのであるが、次に結び付く内容である相加平均・相乗平均の関係の有効性についての強調不足が、原因の一つと思われる。有効性が分かり、次回が楽しみになれば、期待し、興味もわいてきて、意欲・態度や理解に良い結果が現れると考えられ、次回の授業を十分考慮した指導計画の大切さを再認識させられた。

最後に、図14についてであるが、これは理解の変化を示したもので、図8が今までの理解の様子を示しており、比較すると、今までの内容を「理解していた。」と「やや理解していた。」が合計で32人であったが、今回の内容を「理解できた。」と「やや理解できた。」は18人に減ってしまった。この原因については、やはり、今回のねらいが生徒にとって難しかったこと、しかも、そのねらいが二つもあったこと、そのために時間的な余裕がなく、生徒にじっくりと考察してもらうことができなかったことなどが挙げられる。

反省すべきことの多い結果であったが、図7と図11とを比較してみると、「不等式」について、興味・関心が「どちらともいえない。」から、「わいてきた。」に7人程動いており、わずかではあるがよい結果と言えるものもあった。生徒の実態を正確に把握し、目標を精選し、考えたり作業をしたりする時間を十分に取入れた指導計画が、いかに授業を円滑かつ有効なものにするのかということのを再認識させられた結果であった。

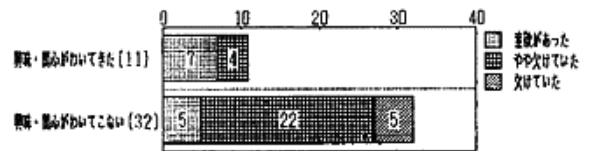


図11 「意欲」と「興味・関心」の関係

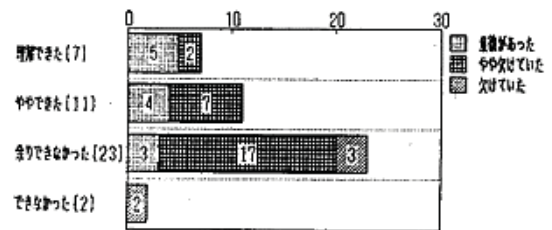


図12 「意欲」と「理解」の関係

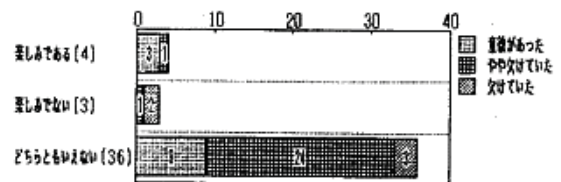


図13 「意欲」と「楽しみ」の関係

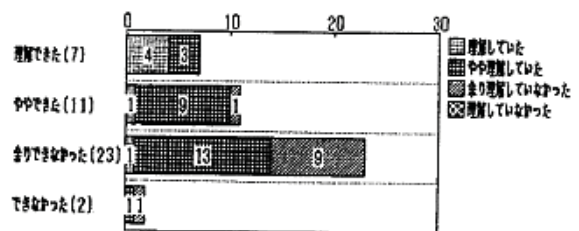


図14 授業前後の理解の変化