高等学校　第３学年　数学科学習指導案

指導者　　海﨑　昌幸

１　単元　　数列

２　単元の目標

○　数列の考え方や体系に関心をもつとともに，それらを事象の考察に積極的に活用しようとする。（関心・意欲・態度）

○　数列の考え方を用いて事象を数学的にとらえることができるとともに，数列における帰納的な考え方の原理や意味，そのよさを認識することができる。（数学的な見方や考え方）

○　事象を数学的にとらえ，それらを表現し適切に処理する方法を身につけ，よりよく問題を解決することができる。（表現・処理）

○　数列についての概念，性質・法則, 用語・記号等の基礎的な知識を身につけるとともに，これらの考え方をもとにして, 漸化式や数学的帰納法の考え方を理解し, 事象の考察に活用することができる。（知識・理解）

３　単元の指導について

⑴　教材について

数列については，小学校以来，自然数の列，偶数の列，奇数の列などのように，具体的な数の列として親しんできている。ここでは，それらを発展させて，等差数列・等比数列を中心に，その一般項や有限個の和について考えていく。無限個の場合については，数学Ⅲの「数列の極限」で改めて学習する。また，ここでは和の公式を導き，その活用を図る。この和については，数学Ⅲの積分法の「定積分と和の極限（区分求積法）」で利用することとなる。さらに，この単元の最後に学習する「数学的帰納法」は自然数nを含む命題の証明方法の一つで，数学全般にわたって活用される大切な考え方である。生徒たちにはその証明方法のよさとその威力を感じてもらいたい。

数列は自然科学や社会科学などの分野でもしばしば取り扱われるものである。実用場面での活用例を通して，生徒たちに数学の有用性や意義を感得させることができればと考える。

⑵　生徒の実態について（男子２６人，女子１５人，計４１人）

普通科の第３学年で，ほぼ全員が理工系大学への進学を希望している。数学の学習に対しては，大変意欲的であり，授業中はよく集中し，真剣に聞き入っている。また，どんな問題に対してもじっくりと取り組む姿勢が見られる。しかし，答えを導き出す過程を論理的に表現したり，根拠を明らかにしながら，筋道立てて相手に説明したりすることに課題がある生徒が多く見受けられる。

４　指導計画（２２時間扱い）

第１次　数列　……………………………………　１時間
第２次　等差数列とその和　……………………　４時間
第３次　等比数列とその和　……………………　３時間
第４次　種々の数列　……………………………　５時間
第５次　漸化式と数列　…………………………　４時間

時	学習内容・活動	関	考	表	知	観点別評価規準
1	漸化式, 漸化式で求められる数列の一般項（1）	○				帰納的に与えられた数列の性質を明らかにするとともに, 簡単な場合について一般項を求めようとする。
2	漸化式で求められる数列の一般項（2）				○	様々な形の漸化式の一般項を求める手順を理解することができる。
3 (本時)	漸化式の応用			○		具体的な事象に関する問題について, 漸化式の考え方を用いて解決することができる。

第６次　数学的帰納法　…………………………　４時間
第７次　総合問題演習　…………………………　１時間

5　本時の指導

(1) 目標　様々な形の漸化式の一般項を求める手順を理解するとともに，具体的な事象に関する問題について，漸化式の考え方を用いて解決することができる。

(2) 準備・資料　　自作プリント２種類

(3) 展開

	学習活動・内容	指導上の留意点・評価
1. 既習事項の確認 （8 分）	・漸化式の定義の再確認をする。 ・様々な形の漸化式について，それぞれの一般項を求める手順を確認する。 ※特に，本時で使う線形３項間漸化式の解法については十分に確認する。	・プリント（漸化式マスターへの道）を見ながら進める。 ㊟様々な形の漸化式の一般項を求める手順を理解することができる。 （観察・発表，知識・理解）
2. 課題確認・課題解決 （20 分）	・学習課題の確認をする。 １から５までの数字が書かれたカードが各１枚ずつ合計５枚ある。この中から１枚のカードを取り出し，カードに書かれた数字を記録して，元に戻すという操作を繰り返す。記録された数字の列について，最初の n 個の数字の和を３で割った余りが０である確率を p_n とする。 (1) p_1 , p_2 を求めよ。 (2) p_{n+1} を p_n の式で表せ。 (3) p_n を求めよ。 ２辺の長さが１と２の長方形と１辺の長さが２の正方形の２種類のタイルがある。縦２，横 n の長方形の部屋をこれらのタイルで過不足なく敷き詰めることを考える。そのような並べ方の総数を a_n で表す。 (1) a_1 , a_2 を求めよ。 (2) a_{n+2} を a_{n+1}, a_n を用いて表せ。 (3) $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。 ・学習課題の解決をする。 ※はじめは自力解決を行い，グループ内の状況により，グループでの相談・議論，教え合いをしながら解決していく。	・本時の目標を生徒たちに認識させる。 ・問題の規則が捉えにくいときは，図や表などを利用して，具体的に考えてみるよう指導する。 ・机間指導をしながら，生徒のつまずきを確認する。また，なかなか手がつかないグループには適宜ヒントを与える。 ・n 回行った状態と $n+1$ 回行った状態（後半の問題は $n+2$ 回行った状態も）のつながりを図や表で考えて，漸化式を作っていくことがポイントである旨を伝える。 ・机間指導をしながら，生徒のつまずきを確認する。また，なかなか手がつかないグループには適宜ヒントを与える。 ・自分自身の言葉で着想や思考を表現することにより，自分の考えを再認識させる。 ・解答・解法はより効率的なものであるか判断させる。 ・生徒それぞれが考えた解答を，相手に説明していく過程で，足りない点に気付かせ，よりよいものにしていかせる。 ・討論は，一人では気付かなかった新しい視点をもたらすことを認識させる。 →数学を多面的，発展的に考えられるようにする！
3. 比較検討 （20 分）	・全体で，解決方法を確認する。 （３人程度発表する。） ※発表に際しては，問題解決の過程について，根拠を明らかにし，筋道を立てて説明することを意識させる。	・帰納的に考えることの意義やそのよさを十分に認識させる。 ・説明を聞いた生徒には，どのようにすればよりよい表現になるかを考えさせる。また，問題の解決で，誤った解答に対しては，どこに誤りがあるのか，誤っているといえる理由は何か，どこを修正すれば，正答になるのかを生徒に考えさせ，説明させる。
4. まとめ （7 分）	・本時のまとめをする。 ・振り返りとして，授業で学んだこと，感想等をワークシートに記入する。	・振り返りとして，授業で学んだことを自分自身の言葉で表現させる。 ㊟具体的な事象に関する問題について，漸化式の考え方を用いて解決することができる。（観察・ワークシート，表現・処理）

数列　～漸化式の応用～

（担当；海崎）

本日の目標：様々な形の漸化式の一般項を求める手順を理解するとともに，具体的な事象に関する問題について，漸化式の考え方を用いて解決することができる。

1．既習事項の整理

1．1．漸化式の定義

数列の各項を，それ以前の項から順にただ１通りに定める規則を示す等式を**漸化式**という。
(→　数列を再帰的に定める等式！！)

1．2．漸化式のパターン

※『漸化式マスターへの道』を参照のこと

① 等差数列　$a_{n+1} = a_n + d$　d：公差
② 等比数列　$a_{n+1} = r\, a_n$　r：公比
③ 階差数列　$a_{n+1} = a_n + f(n)$
④ $a_{n+1} = pa_n + q$
⑤ $a_{n+1} = pa_n + f(n)$
⑥ $a_{n+1} = pa_n + q\, r^n$
⑦ 分数型の漸化式　（ｉ）$a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n + r}$　（ⅱ）$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}$
⑧ $f(n)\, a_{n+1} = f(n+1)\, a_n + q$
⑨ 隣接３項間の漸化式　$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$
（ｉ）α，βの少なくとも一方が１の場合
（ⅱ）α，βはともに１ではなく，かつα ≠ βの場合
（ⅲ）α＝ β（重解）の場合
⑩ 連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = p_1 a_n + q_1 b_n \\ b_{n+1} = p_2 a_n + q_2 b_n \end{cases}$$

2．本日の課題

2．1．課題１

１から５までの数字が書かれたカードが各１枚ずつ合計５枚ある。この中から１枚のカードを取り出し，カードに書かれた数字を記録して，元に戻すという操作を繰り返す。記録された数字の列について，最初の n 個の数字の和を３で割った余りが０である確率を p_n とする。
(1) p_1 , p_2 を求めよ。　(2) p_{n+1} を p_n の式で表せ。　(3) p_n を求めよ。

〈解答〉

自分の解答

班での共有，発表を通して…

３年　　組　　番　氏名(　　　　　　　　　　)

数列　～漸化式の応用～

（担当；海崎）

【類題】

１回の試行で事象Ａが起こる確率が $p\ (0 < p < 1)$ であるとする。この試行を n 回行うときに奇数回Ａが起こる確率を a_n とする。

(1) $n \geqq 2$ のとき，a_n を a_{n-1} と p で表せ。　(2) a_n を n と p で表せ　（佐賀大）

２．２．課題２

２辺の長さが１と２の長方形と１辺の長さが２の正方形の２種類のタイルがある。縦２，横 n の長方形の部屋をこれらのタイルで過不足なく敷き詰めることを考える。そのような並べ方の総数を a_n で表す。ただし，n は正の整数である。

(1) a_1 , a_2 を求めよ。　(2) a_{n+2} を a_{n+1}, a_n を用いて表せ。　(3) $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

〈解答〉

自分の解答

班での共有，発表を通して…

【類題】

３つの文字ａ，ｂ，ｃを繰り返しを許して，左から順に n 個並べる。ただし，ａの次は必ずｃであり，ｂの次も必ずｃである。このような規則を満たす列の個数を x_n とする。例えば，$x_1 = 3$, $x_2 = 5$ である。(1) x_{n+2} を x_{n+1}, x_n を用いて表せ。(2) x_n を求めよ。　（一橋大）

４．本日のまとめ

４．１．立式のポイント

n 回行った状態と $n+1$ 回行った状態（課題２は $n+2$ 回行った状態も含む）のつながりを図や表で考えて，漸化式を作っていく！つまり，最初か，最後の状態を考えて，場合分けをしていくことが大切！！

４．２．振り返り

今日の授業で学んだこと，ポイント，感想等を自由に記入してください。

３年　　組　　番　氏名(　　　　　　　　　　)

漸化式マスターへの道

○基本的な漸化式

1.　等差数列　$a_{n+1}=a_n+d$　d：公差

$\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=\ a_n+3 \end{cases}$

初項２，公差３の等差数列だから

$a_n=2+(n-1)\cdot 3$

$\therefore a_{n+1}=3n-1$

2.　等比数列　$a_{n+1}=r\,a_n$　r：公比

$\begin{cases} a_1=3 \\ a_{n+1}=\ 2a_n \end{cases}$

初項３，公比２の等比数列だから

$a_n=3\cdot 2^{n-1}$

3.　階差数列　$a_{n+1}=a_n+f(n)$

$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=\ a_n+2n-1 \end{cases}$

$a_{n+1}-a_n=2n-1$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の第 k 項は$2k-1$ だから，

n ≧ 2のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$

$$=1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$$

$$=n^2-2n+2$$

$n=1$ のとき，

$a_1=1^2-2\cdot 1+2=1$ より成り立つ。

よって，$a_n\ =n^2-2n+2$

○隣接２項間の漸化式

4.　$a_{n+1}=pa_n+q$

$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=\ 3\,a_n+2 \end{cases}$

$\mathrm{c}=3\mathrm{c}+2$ とおくと，　$\mathrm{c}=-1$

$a_{n+1}=\ 3\ a_n+2$　　…①

$-1\ =\ 3\cdot(-1)+2$　　…② ← $\mathrm{c}=-1$

①　②より，$a_{n+1}+1=\ 3\,(a_n+1)$

数列 $\{a_n+1\}$ は初項 $a_1+1=1+1=2$，

公比３の等比数列だから，

$a_n+1=2\cdot 3^{n-1}$　$\therefore a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$

$\boxed{\begin{array}{l} a_{n+1}=pa_n+q\rightarrow\ a_{n+1}-\alpha=\ p\,(a_n-\alpha)\text{ と} \\ \text{変形して等比数列に帰着させる！} \end{array}}$

5.　$a_{n+1}=pa_n+f(n)$

$\begin{cases} a_1=3 \\ a_{n+1}=\ 3a_n+2n+3 \end{cases}$

$a_{n+2}=\ 3a_{n+1}+2(n+1)+3$　…①

$a_{n+1}=\ 3a_n+2n+3$　　…②

①　②より，

$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+2$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_{n+1}=3b_n+2$

よって，$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

数列$\{b_n+1\}$は，

初項$b_1+1=a_2-a_1+1=14-3+1=12$

$(a_2=3a_1+2\cdot 1+3=3\cdot 3+2+3=14)$

公比３の等比数列だから，-

$b_n+1=12\cdot 3^{n-1}=4\cdot 3^n$

$\therefore b_n=4\cdot 3^n-1$

n ≧ 2 のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}(4\cdot 3^k-1)$$

$$=3+\frac{12(3^{n-1}-1)}{3-1}-(n-1)$$

$$=6\cdot 3^{n-1}-n-2=2\cdot 3^n-n-2$$

$n=\ 1$ のとき，

$a_1=2\cdot 3^1-1-2=3$ より成り立つ。

よって，$a_n=2\cdot 3^n-n-2$

6.　$a_{n+1}=pa_n+q\,r^n$

$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=\ 3a_n+2^n \end{cases}$

漸化式の両辺を 2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

$\mathrm{b}_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ …①とおくと，　$b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n+\dfrac{1}{2}$

変形して，$b_{n+1}+1=\dfrac{3}{2}(b_n+1)$

数列 $\{b_n+1\}$ は，

初項 $b_1+1=\dfrac{a_1}{2^1}+1=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$

公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列だから，

$$b_n+1=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\therefore b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n-1$$

①より，$\dfrac{a_n}{2^n}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-1$

ゆえに，$a_n=2^n\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-1\right\}=3^n-2^n$

漸化式の両辺を r^{n+1} で割る 　→ 特性方程式を用いて解く！

7.　分数型の漸化式

（ｉ）　$a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$

$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2} \\ a_{n+1}=\ \dfrac{a_n}{2a_n+3} \end{cases}$

$a_{n+1}=0$ と仮定すると，$a_n=0$

これを繰り返すと，

$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=0$

ここで，$a_1=\frac{1}{2}\neq 0$となり，矛盾するので，

$a_n\neq 0$（→ 分母が０になることはないから逆数がとれる！！）

与えられた漸化式の両辺の逆数をとると，

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}=\frac{3}{a_n}+2$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_{n+1}=3b_n+2$

よって，$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

数列$\{b_n+1\}$は，

初項 $b_1+1=\dfrac{1}{a_1}+1=2+1=3$，

公比３の等比数列だから，

$b_n+1=3\cdot 3^{n-1}=3^n$　$\therefore b_n=3^n-1$

$a_n=\dfrac{1}{b_n}$ より，$a_n=\dfrac{1}{3^n-1}$

分数型の漸化式は逆数で考える！！

（ⅱ）$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$

$\begin{cases} a_1=3 \\ a_{n+1}=\ \dfrac{4a_n-2}{a_n+1} \end{cases}$

$c=\ \dfrac{4c-2}{c+1}$ とおくと，

$\mathrm{c}(c+1)=4c-2$　$\therefore \mathrm{c}=1,2$

$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n-1}$ …① とおくと，

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-1}=\frac{\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}-2}{\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}-1}$$

$$= \frac{4a_n - 2 - 2(a_n+1)}{4a_n - 2 - (a_n+1)} = \frac{2a_n - 4}{3a_n - 3}$$

$$= \frac{2(a_n - 2)}{3(a_n - 1)} = \frac{2}{3}b_n$$

すなわち，

$b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n$，$b_1 = \frac{a_1 - 2}{a_1 - 1} = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$

ゆえに，$b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

①から，$b_n(a_n - 1) = a_n - 2$

よって，$(b_n - 1)a_n = b_n - 2$

$b_n = 1$ は①を満たさないから，$b_n \neq 1$

ゆえに，$a_n = \frac{b_n - 2}{b_n - 1}$

したがって，$a_n = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 1}$

$$= \frac{2^{n-1} - 4\cdot 3^{n-1}}{2^{n-1} - 2\cdot 3^{n-1}}$$

> 分数漸化式において，特性方程式が２つの解 α，β (α ≠ β) をもつとき，$b_n = \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$ とおくと，$\{b_n\}$ は等比数列になる！！

8. $f(n)\,a_{n+1} = f(n+1)\,a_n + q$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ 3n\,a_{n+1} = (n+1)a_n \end{cases}$$

$3n\,a_{n+1} = (n+1)\,a_n$ より，両辺 $3n(n+1)$ で割ると，$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a_n}{n}$

$b_n = \frac{a_n}{n}$ とおくと，

$b_{n+1} = 3b_n$，$b_1 = \frac{a_1}{1} = 2$ より，

数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列より

$b_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$b_n = \frac{a_n}{n}$ より，$a_n = n\,b_n$

ゆえに，$a_n = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

> n は n 同志, $n+1$ は $n+1$ 同志集める！

○漸化式の応用

9. 隣接３項間の漸化式

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$

漸化式で a_{n+2}，a_{n+1}，a_n の代わりにそれぞれ c^2，c，1 とおいた方程式（特性方程式）の解を α，β とする。

→ $a_{n+2} - \alpha\cdot a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha\cdot a_n)$

(ｉ) α，β の少なくとも一方が 1 の場合

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2 \\ 5a_{n+2} - 8a_{n+1} + 3a_n = 0 \end{cases}$$

$5c^2 - 8c + 3 = 0$ を解くと，c = 1，$\frac{3}{5}$

漸化式は $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{3}{5}(a_{n+1} - a_n)$

また，$a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$ より

$$a_{n+1} - a_n = 1\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

ゆえに，n ≧ 2のとき，

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{5}}$$

$$= \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$n = 1$ のとき，$a_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} = 1$

より成り立つ。

よって，$a_n = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

(ⅱ) α，β はともに 1 ではなく, かつ α ≠ β の場合

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 4 \\ a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \end{cases}$$

$c^2 - 5c + 6 = 0$ を解くと，c = 2, 3

漸化式は $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n)$ …①

$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n)$ …②

①より，数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = 4 - 2\cdot 1 = 2$，公比 3 の等比数列であるから，

$a_{n+1} - 2a_n = 2\cdot 3^{n-1}$ …③

②より，数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 $a_2 - 3a_1 = 4 - 3\cdot 1 = 1$，公比 2 の等比数列であるから，

$a_{n+1} - 3a_n = 1\cdot 2^{n-1}$ …④

③ ④から $a_n = 2\cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$

(ⅲ) α = β（重解）の場合

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2 \\ a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0 \end{cases}$$

$c^2 - 6c + 9 = 0$ を解くと，c = 3（重解）

漸化式は $a_{n+2} - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n)$

数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は，

初項 $a_2 - 3a_1 = 2 - 3\cdot 1 = -1$，

公比 3 の等比数列であるから

$$a_{n+1} - 3a_n = (-1)\cdot 3^{n-1} = -3^{n-1}$$

両辺を $3^{n+1}(\neq 0)$ で割ると，$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = -\frac{1}{9}$

ここで，$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくと，

$b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{9}$，$b_1 = \frac{a_1}{3^1} = \frac{1}{3}$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $\frac{1}{3}$，公差 $-\frac{1}{9}$ の等差数列より

$b_n = \frac{1}{3} + (n-1)\left(-\frac{1}{9}\right)$　∴ $b_n = \frac{4-n}{9}$

$a_n = 3^n\cdot b_n$ より，

$$a_n = 3^n\cdot\frac{4-n}{9} = 3^{n-2}(4-n)$$

10. 連立漸化式

$$\begin{cases} a_1 = 1, b_1 = 3 \\ a_{n+1} = 3a_n + b_n \quad \text{…①} \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n \quad \text{…②} \end{cases}$$

①より $b_n = a_{n+1} - 3a_n$ …③

したがって，$b_{n+1} = a_{n+2} - 3a_{n+1}$

これらを②に代入すると，

$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2a_n + 4(a_{n+1} - 3a_n)$

整理して，$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0$

$c^2 - 7c + 10 = 0$ を解くと，c = 2, 5

よって，漸化式は

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = 5(a_{n+1} - 2a_n) \text{…④} \\ a_{n+2} - 5a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 5a_n) \text{…⑤} \end{cases}$$

④より，数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = (3a_1 + b_1) - 2\cdot 1 = (3\cdot 1 + 3) - 2\cdot 1 = 4$，

公比 5 の等比数列であるから，

$$a_{n+1} - 2a_n = 4\cdot 5^{n-1} \text{…⑥}$$

⑤より，数列 $\{a_{n+1} - 5a_n\}$ は初項 $a_2 - 5a_1 = (3a_1 + b_1) - 5\cdot 1 = (3\cdot 1 + 3) - 5\cdot 1 = 1$，

公比 2 の等比数列であるから，

$$a_{n+1} - 5a_n = 1\cdot 2^{n-1} \text{…⑦}$$

⑥ ⑦から $a_n = \frac{4}{3}\cdot 5^{n-1} - \frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}$

このとき，$a_{n+1} = \frac{4}{3}\cdot 5^n - \frac{1}{3}\cdot 2^n$ となる。

そして，③から

$b_n = a_{n+1} - 3a_n$

$$= \left(\frac{4}{3}\cdot 5^n - \frac{1}{3}\cdot 2^n\right) - 3\left(\frac{4}{3}\cdot 5^{n-1} - \frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}\right)$$

$$= \frac{8}{3}\cdot 5^{n-1} + \frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}$$

よって，$\begin{cases} a_n = \frac{4}{3}\cdot 5^{n-1} - \frac{1}{3}\cdot 2^{n-1} \\ b_n = \frac{8}{3}\cdot 5^{n-1} + \frac{1}{3}\cdot 2^{n-1} \end{cases}$