

高等学校 第3学年 数学科学習指導案

指導者 海崎 昌幸

1 単元 図形と方程式

2 単元目標

- 座標や式を用いて、直線や円などの基本的な平面図形の性質や関係を調べるという解析幾何の考え方のよさに気づき、いろいろな図形の性質や関係の考察に活用しようとする。 (関心・意欲・態度)
- 座標や式を用いて、平面図形の性質や関係を数学的に考察し、図形の見方を深めることができる。 (数学的な見方や考え方)
- 座標や式を用いて、平面図形の性質や関係を数学的に表現することができるとともに、数学的に表現したものを代数的に処理することができる。 (表現・処理)
- 座標や式を用いて、平面図形の性質や関係を数学的に表現して調べるという解析幾何学的手法や、図形を、条件を満たす点の集合としてみる考え方を理解することができる。 (知識・理解)

3 単元の指導について

(1) 教材について

数学Ⅰでは、2次関数のグラフにおいて、「グラフの平行移動と関数の式の関係」、「通る点の座標がわかっているときの関数の決定」等が扱われており、この単元と関係が深い。数学Aでは、「論理と集合」の単元で、命題の真偽と集合の関係について学んでおり、このことは、領域を利用した証明法につながる。また、「平面図形」では、線分の内分・外分、五心及び円の性質について学習している。

数学Ⅱでは、三角形や四角形、円などの基本的な平面図形を直交座標系におき、それらを方程式や不等式として表現し、処理することで平面図形の性質や関係を調べる。この学習を通して、解析幾何の考え方の有用性を認識するとともに、この手法を用いて、いろいろな図形の性質を考察できるようになってもらいたい。また、数学Cでは、条件を満たす点の軌跡として、放物線、楕円、双曲線などの2次曲線を捉え、数学Ⅱの考え方を受け継いだ学習をすることとなる。

(2) 生徒の実態について (男子26人、女子15人、計41人)

普通科の理系クラスの生徒たちで、ほぼ全員が理工系大学への進学を希望している。数学の学習に対しては、大変意欲的であり、授業中はよく集中し、真剣に聞き入っている。また、どんな問題に対してもじっくりと取り組む姿勢が見られる。しかし、答えを導き出す過程を論理的に表現したり、根拠を明らかにしながら、筋道立てて相手に説明したりすることに課題がある生徒が多く見受けられる。

4 指導計画 (20時間扱い)

第1次	点と直線	9時間
第2次	円	5時間
第3次	軌跡と領域	5時間

時	学習内容・活動	関	考	表	知	観点別評価規準
1	軌跡と方程式	○				座標を用いることにより、軌跡が方程式によって機械的に得られることの簡便さやよさを認識しようとしている。
2 (本時)	軌跡と方程式			○		軌跡の表す方程式について、与えられた問題を類型化し、解くことができる。
3	不等式の表す領域		○			直線や円を境界線とする領域を考察することで、直線や円についての見方を深めることができる。
4	領域と最大・最小			○		線形計画法の考え方をを用いて、日常の事象についての最大・最小を求めることができる。
5	領域を利用した証明法				○	領域を利用した命題の証明法について、理解することができる。

第4次	応用問題演習	1時間
-----	--------	-----

5 本時の指導

- (1) 目標 軌跡の表す方程式について、与えられた問題を類型化し、解くことができる。
- (2) 準備・資料 自作プリント2枚
- (3) 展開

	学習活動・内容	指導上の留意点・評価
1. 既習事項の確認 (4分)	- 軌跡の定義の再確認をする。 与えられた条件を満たす点全体の集合が、その条件を満たす点の軌跡である。 - 座標を用いた軌跡の求め方の手順の再確認をする。	- 軌跡が点の集合体であることを十分に確認させる。 - 必要十分性等の確認についても忘れないように指導する。
2. 類型化 (6分)	軌跡の類型のまとめをする。 ①条件→図形 [直線, 円, 楕円, 双曲線, 放物線等] ②連動形 ③媒介変数(パラメータ)表示	③は教科書では不十分な扱いをされているが、数学的価値が一番大きいことを伝える。
3. 課題確認・課題解決 (20分)	- 学習課題の確認をする。 ②連動形 定点 $A(6,0), B(3,3)$ と定円 $x^2 + y^2 = 9$ 上の点 P を3つの頂点とする三角形の重心 G の軌跡を求めよ。 ③媒介変数 xy 平面上に、2直線 $l_1: mx - y + 2m = 0$, $l_2: x + my - 2 = 0$ がある。m がすべての実数をとって変化するとき、l_1, l_2 の交点 P の描く軌跡を求めよ。 - 学習課題の解決をする。 ※はじめは自力解決を行い、グループ内の状況により、グループでの相談・議論、教え合いをしながら解決していく。	- 課題がどのパターンのものであるのか、また、その類型であるならば、解決の手段として、どのようなことを目標としていけばよいのかを考えさせる。 - 机間指導をしながら、生徒のつまづきを確認する。また、なかなか手がつかないグループにはヒントを与える。 - 解答はより効率的なものであるか判断させる。 - 自分自身の言葉で着想や思考を表現することにより、自分の考えを再認識させる。 - 生徒それぞれが考えた解答を、相手に説明していく過程で、足りない点に気付かせ、よりよいものにしていさせる。 - 軌跡を図形的に決めることのよさについても考えさせる。 - 討論は、一人では気付かなかった新しい視点をもたらすことを認識させる。→数学を多面的、発展的に考えられるようにする！
4. 比較検討 (20分)	全体で、解決方法を確認する。 (3人程度発表する。)	- 発表に際しては、問題解決の過程について、<u>根拠を明らかにし、筋道を立てて説明する</u>ように指示する。 - 説明を聞いた生徒には、どのようにすればよりよい表現になるのかを考えさせる。また、問題の解決で、誤った解答に対しては、どこに誤りがあるのか、誤っているといえる理由は何か、どこを修正すれば、正答になるのかを生徒に考えさせ、説明させる。
5. まとめ (5分)	- 本時のまとめをする。 - 振り返りとして、授業で学んだこと、その時間のポイント、感想等をワークシートに記入する。	- 座標や式を用いて、軌跡の考え方を活用することのよさに気付かせる。 - 授業で学んだこと、その時間のポイントは自分自身の言葉で表現させる。 ④軌跡の表す方程式について、与えられた問題を類型化し、解くことができる。 (観察・ワークシート、表現・処理)

本日の目標：軌跡の表す方程式について、与えられた問題を類型化し、解くことができる。

1. 既習事項の整理

1. 1. 軌跡の定義

与えられた条件を満たす点全体の集合を、その条件を満たす点の**軌跡**という。
軌跡の条件を表す方程式を**軌跡の方程式**という。

1. 2. 軌跡の求め方の手順

- Step1. **軌跡上の任意の点の座標をおく**。例えば、 $P(x, y)$ とする。
Step2. 与えられた条件から **x, y の関係式を導く**。
Step3. Step2.から、軌跡の方程式を導き、その方程式の表す**図形を求める**。
Step4. その図形上の点が条件を満たしていることを確認する。

※Step4.は計算の逆をたどることによって、逆が成り立つことが明らかな場合は省略することが多い。

1. 3. 軌跡の基本類型

①基本的な求め方 (条件→図形)

- Ex. ・アポロニウスの円… 2 定点からの距離($\neq 1$) の比が一定である点の軌跡
・角の 2 等分線…角の 2 辺に至る距離が等しい点の軌跡
・ 2 次曲線 (楕円, 双曲線, 放物線等)

②連動形

- 動点 $Q(s, t)$ とおき、求める軌跡上の点 (x, y) とおく
→ 動点 $Q(s, t)$ と軌跡 (x, y) の関係を考える [s, t を x, y で表す]
→ (**s, t を消去して**) x, y の式に！

- Ex. $\begin{cases} \cdot \text{三角形の重心} \\ \cdot \text{分点 (内分, 外分)} \end{cases}$ 等を利用したもの

③媒介変数 (パラメータ)

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad x, y \text{ の式に!}$$

t を消去して

※教科書では極めて不十分な扱いしかされていないが、実践的に重要性は高い！

2. 本日の課題

2. 1. 課題 1

定点 $A(2, 0)$, $B(4, 0)$ と円 $x^2 + y^2 = 9$ 上の点 P を頂点とする三角形の重心 G の軌跡を求めよ。

〈解答〉

自分の解答 類型 ()

班での共有, 発表を通して…

【類題】

定点 $A(6, 0)$, $B(3, 3)$ と円 $x^2 + y^2 = 9$ 上の点 P を頂点とする三角形の重心 G の軌跡を求めよ。

2. 2. 課題 2

x, y 平面上に, 2 直線 $l_1: mx - y + 8 = 0$, $l_2: x + my - 6 = 0$ がある。 m がすべての実数をとって変化するとき, l_1, l_2 の交点 P の描く軌跡を求めよ。

〈解答〉

自分の解答 類型 ()

班での共有, 発表を通して…

【類題】

x, y 平面上に, 2 直線 $l_1: mx - y + 2m = 0$, $l_2: x + my - 2 = 0$ がある。 m がすべての実数をとって変化するとき, l_1, l_2 の交点 P の描く軌跡を求めよ。 (東大)

4. 本日のまとめ

4.1. 授業のまとめ

2 曲線 $F(x, y, t) = 0 \cdots \textcircled{1}$, $G(x, y, t) = 0 \cdots \textcircled{2}$ が与えられているとする。

このとき, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の交点の軌跡は「 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ をともに満たす点 (x, y) の集合」に等しい。

例えば, $\textcircled{1}$ が t に関して $t = f(x, y) \cdots \textcircled{3}$ と解けるならば,

交点の軌跡の方程式は, $\textcircled{3}$ を $\textcircled{2}$ に代入した方程式 $G(x, y, f(x, y)) = 0$ である。

4.2. 入試に向けて

軌跡と方程式の単元に絞って, 最近の入試をしてみる, 頻出パターンは…

- ・基本類型
- ・弦の midpoint の軌跡 (ニューパワーオン 77)
- ・2 曲線族の交点の軌跡

4.3. 振り返り

今日の授業で学んだこと, ポイント, 感想等を自由に記入してください。

5. チャレンジ問題

時間があったらやってみよう!!

座標平面上の点 P から放物線 $y = x^2$ へ 2 本の接線が引けて, かつ, この 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。 (千葉大)